

## АНАЛОГОВА МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ПІД-РЕГУЛЯТОРА

### Вступ

Сьогодні практично неможливо уявити сучасні технології без комп'ютерних систем керування (КСК). Спектр застосування КСК дуже різноманітний – від побуту до автоматизації технологічних систем у харчовій промисловості, хімії, теплоенергетиці із високими вимогами до стабільності технологічних параметрів. Для досягнення необхідної якості керування, спеціалістами АСУ ТП розробляється відповідне алгоритмічне забезпечення КСК, яке дозволяє ефективно керувати технологією. Шлях від початку до кінцевого створення програмного забезпечення КСК складний, його розглядати ми не будемо. Зупинимося на базовій ланці КСК – програмованому регуляторі. У більшості випадків програмовані регулятори реалізують лінійні закони регулювання: П, І, ПД, ПІ, і як узагальнений – ПІД–закон (хоча не виключається можливість реалізації певної функції керування, що враховує специфіку об'єкта).

### Постановка завдання

За десятиліття впровадження аналогових систем керування розроблено велику кількість методів налагодження неперервних регуляторів. Останні мають суттєву перевагу перед дослідженням цифрових систем (апарат різницевого рівняння, матричні методи) у сенсі їх наочності, зокрема графічним зображенням годографів. Хоча за великим рахунком, це, швидше, – справа смаку і звички.

Програмований регулятор КСК містить: амплітудноімпульсний модулятор, що перетворює неперервний сигнал на послідовність імпульсів із часом квантування  $T$ ; функцію перетворення, що реалізує закон керування (як правило, ПІД–закон) та демодулятор (частіше усього – фіксатор нульового порядку), що забезпечує постійне значення вихідного сигналу на час  $T$ . Якщо розглянути послідовну сукупність цих ланок (де вхідний та вихідний сигнали є неперервними), то є всі підстави, принаймні, формально моделювати цифровий регулятор (разом із модулятором та демодулятором) як неперервний (аналоговий).

Аналогова модель цифрового ПІД–регулятора

Передаюча функція цифрового ПІД–регулятора має вид [1]:

$$W_p(z) = K_1 + K_2 \frac{Tz}{z-1} + K_3 \frac{z-1}{Tz}, \quad (1)$$

де  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  – пропорційна, інтегральна та диференціальна частини налагодження ПІД–регулятора.

Виходячи із (1) можна отримати рекурентне відношення, що реалізує алгоритм роботи цифрового ПІД–регулятора:

$$u[kT] = \left( K_1 + K_2 T + \frac{K_3}{T} \right) x[kT] - \frac{K_3}{T} x[(k-1)T] + K_2 u[(k-1)T], \quad (2)$$

тут  $kT$  – дискретний час на  $k$ -му кроці із періодом квантування  $T$ ;  $x(kT)$ ,  $u(kT)$  – сигнал неузгодженості та сигнал керування регулятора на  $k$ -му кроці. Змінюючи параметри  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  можна отримати П, І, ПІ, ПД, ПІД–закони регулювання.

Конформне відображення  $s$ -площини Лапласа на дискретну  $z$ -площину визначається залежністю:

$$z = e^{sT}. \quad (3)$$

Враховуючи (3), із (1) отримуємо аналогову модель функції перетворення цифрового ПІД–регулятора:

$$W_p(s) = K_1 + K_2 T \frac{1}{1 - e^{-sT}} + \frac{K_3}{T} (1 - e^{-sT});$$

або у класичному вигляді:

$$W_p(s) = K_1 \left[ 1 + \frac{T}{T_I} \left( \frac{1}{1 - e^{-sT}} \right) + \frac{T_D}{T} (1 - e^{-sT}) \right], \quad (4)$$

де  $T_I$ ,  $T_D$  – час інтегрування та диференціювання ПІД–регулятора ( $T_I = K_1/K_2$ ,  $T_D = K_3/K_1$ ).

Крім функції перетворення програмний регулятор КСК включає амплітудноімпульсний модулятор та фіксатор нульового порядку. Вважатимемо, що модулятор реалізує амплітудноімпульсну модуляцію першого роду, тобто в момент часу  $t_k = kT$  вихідний сигнал модулятора дорівнює  $x_k = x(t_k)$ . Квантований сигнал  $x_k$  прийнято представляти імпульсом висотою  $x_k$ . Енергія імпульсу сигналу характеризується його площею (добутком ширини імпульсу на його висоту). Одиничний імпульс теоретично має нескінчену амплітуду (висоту), нульову ширину, але його площа дорівнює одиниці. Отже, імпульс  $x_k$  несе енергію рівну  $x_k$ , тоді як

енергія сигналу  $x(t)$  на протязі інтервалу квантування має величину  $\int_{t_k}^{t_k+T} x(t) dt = T x_k$ , якщо ігнорувати зміну сигналу в межах періоду  $T$ . Таким чином, виходить, що коефіцієнт передачі модулятора:

$$W_m(s) = \frac{1}{T} \tag{5}$$

Фіксатор нульового порядку має передаточну функцію:

$$W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \tag{6}$$

Враховуючи, (4) – (6), отримаємо аналогову модель цифрового ПІД-регулятора:

$$W_{up}(s) = W_m(s) W_p(s) W_\phi(s) \tag{7}$$

Структурна схема, що відповідає (7), представлена на рис. 1.

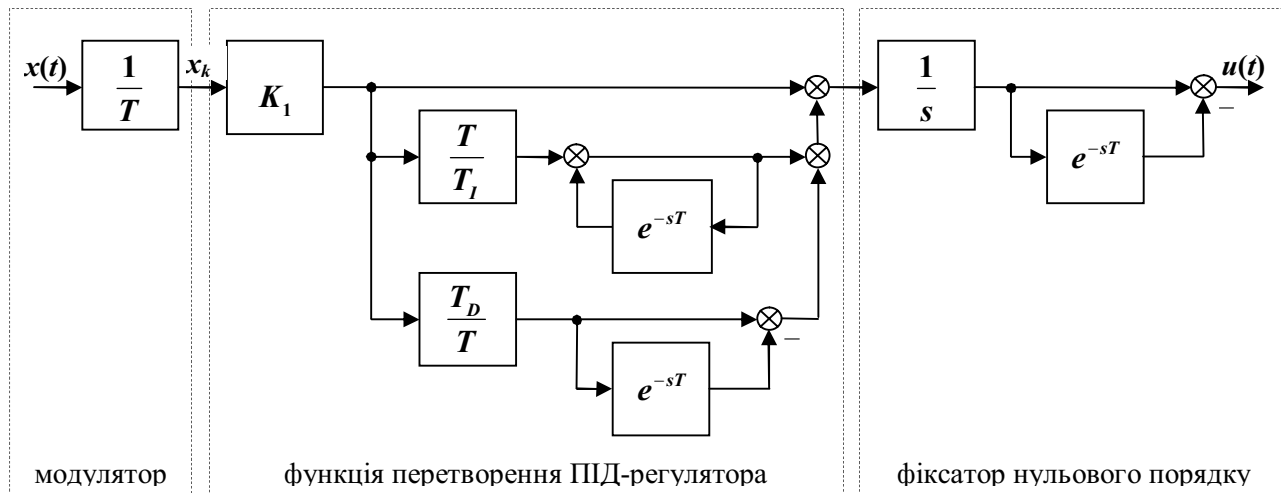


Рис. 1. Структурна схема аналогової моделі цифрового ПІД-регулятора;  $x(t)$ ,  $u(t)$  – відповідно сигнал неузгодженості та сигнал керування регулятора.

Слід зауважити, що аналогова модель (7) не є тотожним відтворенням цифрового ПІД-регулятора. Вона лише є наближенням, яке моделює роботу регулятора (2) у  $k$ -ті моменти дискретного часу із періодом квантування  $T$  (за властивостями  $z$ -перетворення у моменти “неперервного” часу  $t$  між проміжками квантування  $T$ , значення дискретного сигналу не визначено). Результати моделювання перехідного процесу регулятора при одиничному ступінчатому збуренні представлені на рис.2.

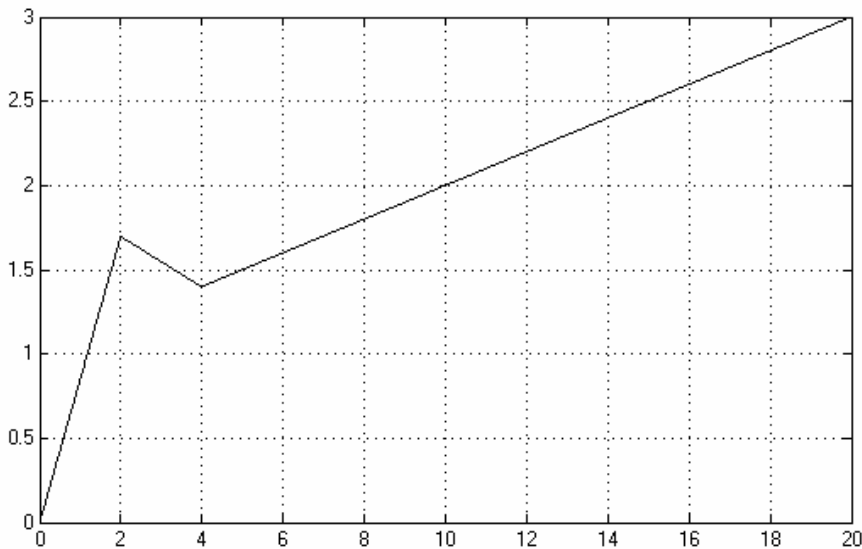


Рис. 2. Перехідний процес в регуляторі (7) на ступінчате входне збурення.

Моделювання проводилося у середовищі Simulink програмного пакету MatLAB [1]. Структурна схема, що моделювалася представлена на рис. 3. При моделюванні використано наступні настройки регулятора:  $K_1=1$ ,  $T_i=10$ ,  $T_D=1$ ,  $T=2$ .

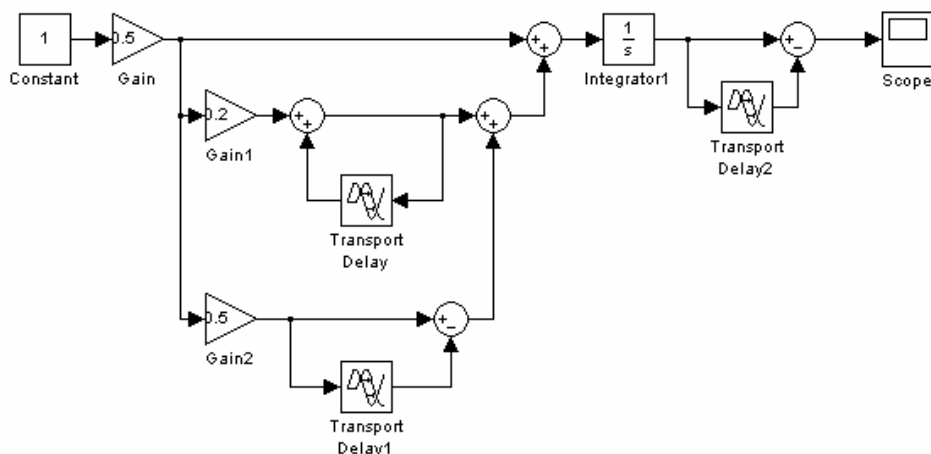


Рис. 3. Структурна схема ПІД-регулятора для моделювання у Simulink.

### Висновки

Для розрахунку цифрових систем керування відомо два підходи. Перший полягає в заміні неперервної частини об'єкта керування її дискретним аналогом. У цьому випадку система керування розраховується із врахуванням часу дискретизації  $T$ . Такий підхід дозволяє зменшити обчислювальне навантаження на КСК при роботі програмованого регулятора за рахунок збільшення  $T$ . Проте, при синтезі програмованого ПІД-регулятора важко оцінити критерій налагодження контуру керування (скажімо визначити показник коливності).

Другий підхід ґрунтується на теоремі Котельникова [2] і передбачає вибір часу дискретизації  $T$  заздалегідь малим, що дозволяє застосовувати неперервні методи налаштування регулятора. У цьому випадку робота цифрового ПІД-регулятора потребує від КСК додаткових ресурсів на виконання арифметичних обчислень через малі проміжки  $T$ .

Застосування аналогової моделі цифрового ПІД-регулятора відкриває ще один підхід до синтезу цифрових систем керування, а саме – використання частотних методів розрахунку із врахуванням часу дискретизації  $T$ . Передаточна функція (7) не є дробово-раціональною. Отже, її застосування, наприклад, для дослідження стійкості систем керування кореневими методами (через корені характеристичного полінома) чи із використанням критеріїв Гурвиця та Михайлова є неприйнятне. Проте, якщо для системи керування із моделлю цифрового ПІД-регулятора (7) перейти від неперервної області Лапласа до частотної (шляхом заміни  $s$  на  $j\omega$ ) – можна досліджувати стійкість системи за критерієм Найквіста. Те ж відносно якості цифрових систем. Кореневі методи (кореневі годографи, ступінь стійкості, ступінь коливності і т.п.) застосувати неможливо. Але використання частотних методів, наприклад, розрахунок системи на заданий показник коливності (через  $M$ -коло, або через розрахунок АЧХ замкненої системи) не викликає складностей при застосуванні комп'ютерної техніки.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Р. Дорф, Р. Бішоп. Современные системы управления. –М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. –832 с: ил.
2. В. Я. Ротач. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. –М.: Энергия, 1973. –440 с: ил.