

**А.И. Жученко  
Н.А. Кубрак  
И.М. Голинко**

**ДИНАМИКА ОБЪЕКТОВ С  
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**А.И. Жученко  
Н.А. Кубрак  
И.М. Голинко**

# **ДИНАМИКА ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины в качестве  
учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности  
«Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии»*

**Киев  
«ЭКМО»  
2005**

**ББК 32.965.4**

**УДК 681.5.015**

*Гриф предоставлен Министерством образования и науки Украины  
(Письмо №14/18.2-841 от 15.04.2005)*

Рецензенты: Ю. А. Скрипник, д.т.н., проф. (Киевский национальный университет технологий и дизайна)  
Ю. М. Ковриго, к.т.н., доц. (Национальный технический университет Украины “КПИ”)

**Жученко А.И., Кубрак Н.А., Голинко И.М.** Динамика объектов с распределенными параметрами: Учебн. пособие. –К.: «ЕКМО», 2005. -121с

Рассмотрены методы аналитического моделирования типовых тепловых объектов – вывод дифференциальных уравнений в частных производных, получения передаточных функций по температурным каналам, алгоритмы расчета частотных характеристик.

Приводятся алгоритмы, доведенные до уровня подпрограмм на Турбо Паскале, для численного анализа динамического поведения таких механических систем как тяжелая цепь с грузом на конце (изучается ее поперечные колебания) и набивная свая, находящейся в грунте (изучаются ее продольные колебания на предмет выявления различных дефектов и их локализации). Также анализируются динамические характеристики проточного датчика плотности жидкости и транспортера-расходомера.

Для студентов направления подготовки “Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии” для всех форм обучения, и, в первую очередь, для студентов иностранцев данной специальности.

**ISBN 966-8555-27-9**

© А.И. Жученко, Н.А. Кубрак,  
И.М. Голинко, 2005

## Введение

Моделирование системы автоматического управления, как правило, начинается с моделирования ее самой сложной и ответственной части, а именно – объекта управления. Технологические объекты в химической промышленности являются весьма инерционными, что объясняется высоким уровнем мощностей, производительностей. В сравнении с инерционностью объекта динамические элементы системы как-то: датчики, преобразователи, усилители, линии передачи сигналов и т.п. чаще всего практически не влияют на динамику системы в целом. Этим объясняется первостепенное внимание разработчика системы именно к динамике объекта управления. Ну, и естественно, система создается под объект, т.к. именно он решает основную задачу – производство материального продукта или соответствующих услуг.

В данном пособии математические модели получаются, как правило, аналитическим путем. Объекты моделирования и, соответственно, их модели принято разделять на два больших класса: объекты с сосредоточенными и распределенными параметрами. Первые из них – более простые и, разумеется, – менее точные. Классическая теория автоматического управления ориентирована преимущественно на использование моделей с сосредоточенными параметрами, но, строго говоря, объектов с чисто сосредоточенными параметрами в природе не бывает. Сведение сложного технологического объекта к конечному числу сосредоточенных емкостей – это “силовой прием” – и он может быть оправдан далеко не всегда. Дело в том, что математическая модель объекта (в частности, объекта автоматического управления) создается и существует не сама по себе (не сама ради себя), а как средство решения каких-то задач, выходящих за рамки самого объекта (для синтеза и оптимизации системы управления данным объектом, или технологической системой, включающий этот объект и т.д.). Поэтому, разработка модели объекта обычно рассматривается как составная часть решения более сложной задачи. При такой постановке логично ввести (отразить) в математическую модель объекта максимум доступной

исследователю информации о нем (про запас). Трудности, возникающие при усложнении модели, сейчас принято перекладывать на “плечи” компьютеров, что, естественно, учитывается при изложении материала.

# **1. Математическое моделирование динамики тепловых объектов**

Исторически тепловые объекты были одними из первых, динамика температуры в которых стала предметом изучения со стороны математиков и инженеров. В этой области был получен ряд фундаментальных результатов, которые потом были распространены на изучение поведения объектов другой физической природы. Процессы теплопроводности, перенос тепла вместе с теплоносителем в трубопроводах и других трубчатых конструкциях поставили исследователей перед необходимостью учитывать пространственную распределенность температуры как определяющего параметра при расчете установившихся и, особенно, переходных режимов как отдельных аппаратов так и целых производств. В химической технологии, в энергетике, в пищевой промышленности эффекты пространственной распределенности параметров настолько четко выражены, что при пренебрежении ими задача построения адекватной математической модели становится невозможной. В данном разделе мы ставили перед собой задачу продемонстрировать читателю некоторые, важные с нашей точки зрения, подходы к разработке и исследованию динамических моделей простейших тепловых объектов, в частности, получить аналитическое решение в виде передаточных функций или частотных характеристик. Численные алгоритмы компьютерного расчета переходных процессов в подобных объектах более подробно рассматриваются в ряде работ авторов (см. список литературы).

## 1.1. Передаточные функции и частотные характеристики плоской теплоаккумулирующей стенки

Алгоритм вывода формул для передаточных функций, исходя из дифференциального уравнения в частных производных, демонстрируем сначала на одном из простейших примеров, а именно на примере дифференциального уравнения теплопроводности с одним измерением

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

которое уже рассматривалось нами в [40], но там с точки зрения его численного интегрирования.

Для конкретности будем считать, что дифференциальное уравнение описывает динамику температуры в плоской теплоаккумулирующей стенке толщиной  $\delta$ , координата  $x$  отсчитывается от ее "левой" поверхности ( $x = 0$ ), тогда как "правая" поверхность будет отвечать значению  $x = \delta$ . Коэффициент температуропроводности материала стенки  $a$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . На каждой из поверхностей стенки могут иметь место граничные условия первого, второго или третьего рода. Они будут задаваться значениями параметров  $Ngl$  (номер граничного условия на левой поверхности) и  $Ngr$  (номер граничного условия на правой поверхности).

$T_l(t)$ ,  $T_r(t)$  - это соответственно температуры левой и правой поверхностей стенки в функции времени в случае заданных на них граничных условий первого рода.

$Q_l(t)$ ,  $Q_r(t)$  - плотности (на единицу поверхности) тепловых потоков через соответствующие поверхности при граничных условиях второго рода.

$T_{sl}(t)$ ,  $T_{sr}(t)$  - температуры теплоносителей, которые омывают левую и правую поверхности при условии, что там имеет место конвективный теплообмен с поверхностью, который отвечает граничным условиям третьего рода.

$\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  - коэффициенты теплообмена на левой и правой поверхностях стенки при граничных условиях третьего рода.

Математические операции, которыми сопровождается вывод формул для передаточных функций, довольно очевидны, поэтому комментарии сводим к минимуму. Для ряда вариантов (комбинаций граничных условий) вообще приведем передаточные функции без вывода. Читатель может потренироваться, проверяя приведенные формулы.

Выполним над (1.1) преобразование Лапласа относительно  $t$  исходя из нулевых начальных условий:

$$p \bar{\theta} = a \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2}, \quad (1.2)$$

где: 
$$\bar{\theta} = \int_0^{\infty} \theta e^{-pt} dt .$$

Уравнение (1.2) перепишем так:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = 0. \quad (1.3)$$

Это обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение, и его решение имеет вид:

$$\bar{\theta} = C_1 e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\pm \sqrt{\frac{p}{a}}$  - корни характеристического уравнения:  $S^2 - \frac{p}{a} = 0$ .

Для определения  $C_1$ , и  $C_2$  в (1.4) надо воспользоваться граничными условиями на поверхностях стенки, то есть при  $x = 0$  и при  $x = \delta$ , где  $\delta$  - толщина стенки.

Вариант 1

$$N_{gl}=1, N_{gr}=1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta|_{x=0} = T_l(t), \\ \theta|_{x=\delta} = T_r(t). \end{array} \right.$$

В изображениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}|_{x=0} = L[T_l(t)], \\ \bar{\theta}|_{x=\delta} = L[T_r(t)]. \end{array} \right.$$

Рассмотрим (1.4) при  $x = 0$  и  $x = \delta$ :



$$\begin{cases} L[T_l(t)] = C_1 + C_2, \\ L[T_r(t)] = C_1 e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + C_2 e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} L[T_l(t)]; & 1 \\ L[T_r(t)]; & e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1; & 1 \\ e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}; & e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}};$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1; & L[T_l(t)] \\ e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}; & L[T_r(t)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1; & 1 \\ e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}; & e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}$$

ИЛИ:

$$C_1 = \frac{e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)] - L[T_r(t)]}{e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

$$C_2 = \frac{L[T_r(t)] - e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)]}{e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}}.$$

Подставим  $C_1$  и  $C_2$  в (1.4):

$$\bar{\theta} = \frac{e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)] - e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_r(t)] + e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_r(t)] - e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)]}{e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}}$$

После перегруппировки и умножения числителя и знаменателя на -1:

$$\bar{\theta} = \frac{e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}} L[T_l(t)] + \frac{e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}} L[T_r(t)].$$

Коэффициенты при  $L[T_l(t)]$  и  $L[T_r(t)]$  являются соответственно передаточными функциями каналов “ $T_l \rightarrow \theta(x)$ ” и “ $T_r \rightarrow \theta(x)$ ”.

$$W_{T_l \rightarrow \theta}(p) = \frac{sh \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{sh \left[ \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}; \quad (1.5)$$

$$W_{T_r \rightarrow \theta}(p) = \frac{sh \left[ x \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{sh \left[ \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}; \quad (1.6)$$

### Вариант 2

$$Ngl = 1; Ngr = 2;$$

$$\begin{cases} \theta|_{x=0} = T_l(t), \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = Q_r(t). \end{cases}$$

В изображениях:

$$\begin{cases} \bar{\theta}|_{x=0} = L[T_l(t)], \\ -\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = L[Q_l(t)]. \end{cases}$$

Подставляем в последнюю систему выражение (1.4):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = L[T_l(t)], \\ -\lambda \left[ C_1 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} - C_2 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \right] = L[Q_l(t)], \end{cases}$$

откуда:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\begin{vmatrix} L[T_l(t)] & ; & 1 \\ L[Q_r(t)] & ; & \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & ; & 1 \\ -\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}} ; \\ C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & ; & L[T_l(t)] \\ -\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & L[Q_r(t)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & ; & 1 \\ -\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}} \end{array} \right. ;$$

или после раскрытия определителей:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)] - L[Q_l(t)]}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left( e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \right)}, \\ C_2 = \frac{L[Q_r(t)] + \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)]}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left( e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \right)}. \end{array} \right.$$

Подставим  $C_1$  и  $C_2$  в (1.4):

$$\bar{\theta} = \frac{e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}} L[T_l(t)] + \frac{-e^{x \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-x \sqrt{\frac{p}{a}}}}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left( e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \right)} L[Q_l(t)],$$

откуда:

$$W_{T_l \rightarrow \theta}(p) = \frac{ch \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{ch \left[ \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right]} \quad (1.7)$$

$$W_{\theta_l \rightarrow 0}(p) = \frac{-ch \left[ x \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left[ \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right]} \quad (1.8)$$

### Вариант 3

$Ngl = 1; Ngr = 3.$

$$\begin{cases} \theta|_{x=0} = T_l(t), \\ -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\delta} = \alpha_0 [\theta|_{x=\delta} - T_{sr}(t)]. \end{cases}$$

В изображениях:

$$\begin{cases} \bar{\theta}|_{x=0} = L[T_l(t)], \\ -\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=\delta} = \alpha_0 [\bar{\theta}|_{x=\delta} - L[T_{sr}(t)]]. \end{cases}$$

Подставляем сюда выражение (1.4):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = L[T_l(t)], \\ -\lambda \left[ C_1 \sqrt{\frac{P}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} - C_2 \sqrt{\frac{P}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} \right] = \alpha_0 \left\{ C_1 e^{-\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} + C_2 e^{-\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} - L[T_{sr}(t)] \right\}, \end{cases}$$

или после сведения подобных:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = L[T_l(t)], \\ C_1 \left[ -\left( \lambda \sqrt{\frac{P}{a}} + \alpha_0 \right) e^{\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} \right] + C_2 \left[ \left( \lambda \sqrt{\frac{P}{a}} - \alpha_0 \right) e^{-\delta \sqrt{\frac{P}{a}}} \right] = -\alpha_0 L[T_{sr}(t)], \end{cases}$$

откуда:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} L[T_l(t)] & ; & 1 \\ -\alpha_0 L[T_{sr}(t)] & ; & \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & ; & 1 \\ -\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & ; & L[T_l(t)] \\ -\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & -\alpha_0 L[T_{sr}(t)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & ; & 1 \\ -\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} & ; & \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}$$

или:

$$C_1 = \frac{\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_{sr}(t)] + \alpha_0 L[T_{sr}(t)]}{\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

$$C_2 = \frac{-\alpha_0 L[T_{sr}(t)] + \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} L[T_l(t)]}{\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}}.$$

Подставляем  $C_1$  и  $C_2$  в (1.4), откуда получаем передаточные функции.

или:

$$W_{T_l \rightarrow \theta}(p) = \frac{\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{+(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}}}{\left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0\right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left(\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0\right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

$$W_{T_{sr} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{\alpha_0 \left( e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}} \right)}{\left( \lambda\sqrt{\frac{p}{a}} + \alpha_0 \right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left( \lambda\sqrt{\frac{p}{a}} - \alpha_0 \right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

или:

$$W_{T_l \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left( \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} - 1 \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}}}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left( \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} - 1 \right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

$$W_{T_{sr} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \left( \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} - 1 \right) e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}},$$

Для остальных вариантов передаточные функции приведем без вывода.

#### Вариант 4

$Ngl=2, Ngr=1.$

$$W_{Q_l \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{sh \left[ (\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( \delta\sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad (1.11)$$

$$W_{T_r \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{ch \left( x\sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{ch \left( \delta\sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.12)$$

#### Вариант 5

$Ngl=2, Ngr=2.$

$$W_{Q_l \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{ch \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad (1.13)$$

$$W_{Q_r \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{-ch \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.14)$$

### Вариант 6

$Ng_l=2, Ngr=3.$

$$W_{Q_l \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{sh \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right] + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}, \quad (1.15)$$

$$W_{T_{sr} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{ch \left[ x \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.16)$$

### Вариант 7

$Ng_l=3, Ngr=1.$

$$W_{T_{sl} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{sh \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad (1.17)$$

$$W_{T_r \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{sh \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ sh \left( \alpha \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}. \quad (1.18)$$

### Вариант 8

$Ng1=3, Ngr=2.$

$$W_{T_{sl} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{ch \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad (1.19)$$

$$W_{Q_r \rightarrow \theta(x)}(p) = - \frac{sh \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ ch \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} sh \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}. \quad (1.20)$$

### Вариант 9

$Ng1=3, Ngr=3.$

$$W_{T_{sl} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{sh \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right] + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left[ (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} - \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}}, \quad (1.21)$$

$$W_{T_{sr} \rightarrow \theta(x)}(p) = 2 \frac{sh \left( (\delta - x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} ch \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} - \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}} \quad (1.22)$$

Следует еще рассмотреть вариант полубесконечной стенки, когда  $\delta = \infty$ . Из (1.4) очевидно, что конечное значения температуры может иметь место лишь при условии, что  $C_1 = 0$ .

Примем обозначение  $Ngr=8$  (цифра 8 у вас не ассоциируется с обозначением  $\infty$ ). Тогда.



### Вариант 10

$Ng1=1; Ngr=8.$

$$W_{T_l \rightarrow \theta(x)}(p) = e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.23)$$

### Вариант 11

$Ng1=2; Ngr=8.$

$$W_{Q_l \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.24)$$

### Вариант 12

$Ng1=3; Ngr=8.$

$$W_{T_{sl} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.25)$$

Расчет частотных характеристик по передаточным функциям типа (1.5)-(1.22) проиллюстрируем на примере канала, описываемого передаточной функцией (1.19) - "температура теплоносителя, который омывает левую поверхность, - температура стенки в  $x$ -вом сечении" ( $Ng1=3, Ngr=2$ ).

Обозначая, для упрощения, передаточную функцию (1.19) как  $W(p)$ , выразим гиперболические функции в ней через экспоненты:

$$W(p) = \frac{e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha_0\delta}\sqrt{\frac{p}{a}}\left(e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}\right)}. \quad (1.26)$$

Заменяем в (1.20)  $p$  на  $j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{j\omega}{a}}} + e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{j\omega}{a}}}}{e^{\delta\sqrt{\frac{j\omega}{a}}} + e^{-\delta\sqrt{\frac{j\omega}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha_0\delta}\sqrt{\frac{j\omega}{a}}\left(e^{\delta\sqrt{\frac{j\omega}{a}}} - e^{-\delta\sqrt{\frac{j\omega}{a}}}\right)}. \quad (1.27)$$

Очевидно, что:

$$\sqrt{j} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}. \quad (1.28)$$

Ограничимся положительным значением, то есть:

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}. \quad (1.29)$$

Можно показать, что использования знака "минус" в (1.28) даст тот же результат в (1.24), что и при знаке "плюс". Тогда:

$$\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}} = \Omega(1+j), \quad (1.30)$$

где 
$$\Omega = \delta \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Подставим (1.30) в (1.27):

$$W(j\omega) = \frac{e^{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\Omega(1+j)} + e^{-\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\Omega(1+j)}}{e^{\Omega(1+j)} + e^{-\Omega(1+j)} + b\Omega(1+j)[e^{\Omega(1+j)} - e^{-\Omega(1+j)}]}, \quad (1.31)$$

где 
$$b = \frac{\lambda}{\alpha_0 \delta}.$$

Выносим в числителе (1.31) за скобки  $e^{\Omega(1-j)}$ , а в знаменателе  $e^{\Omega}$ :

$$W(j\omega) = e^{-\frac{\Omega x}{\delta}} \frac{e^{j\Omega\left(1-\frac{x}{\delta}\right)} + e^{-2\Omega\left(1-\frac{x}{\delta}\right)} e^{-j\Omega\left(1-\frac{x}{\delta}\right)}}{e^{j\Omega} + e^{-2\Omega} e^{-j\Omega} + b\Omega(1+j)[e^{j\Omega} - e^{-2\Omega} e^{-j\Omega}]}. \quad (1.32)$$

Числитель (2.32) представим так:

$$\cos(z) + j \sin(z) + e^{-2z} [\cos(z) - j \sin(z)] = R_1 + jI_1, \quad (1.33)$$

где 
$$z = \Omega \left(1 - \frac{x}{\delta}\right), \quad R_1 = (1 + e^{-2z}) \cos(z), \quad I_1 = (1 - e^{-2z}) \sin(z).$$

Знаменатель (1.32)

$$\begin{aligned} & \cos(\Omega) + j \sin(\Omega) + e^{-2\Omega} [\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)] + \\ & + b\Omega(1+j) \{ \cos(\Omega) + j \sin(\Omega) - e^{2\Omega} [\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)] \} = R_2 + jI_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Введем обозначение

$$\begin{cases} E = 1 + e^{-2\Omega}, \\ F = 1 - e^{-2\Omega}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Тогда

$$R_2 = E \cos(\Omega) + b\Omega[F \cos(\Omega) - E \sin(\Omega)],$$

$$J_2 = F \sin(\Omega) + b\Omega[F \cos(\Omega) + E \sin(\Omega)].$$

Сама же амплитудно-фазовая характеристика (1.32) приобретает вид

$$W(j\omega) = e^{-\frac{\Omega x}{\delta}} \frac{R_1 + jI_1}{R_2 + jI_2} = e^{-\frac{\Omega x}{\delta}} \frac{(R_1 + jI_1)(R_2 - jI_2)}{R_2^2 + I_2^2},$$

или

$$W(j\omega) = X + jY. \quad (1.36)$$

Где

$$X = \frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2}$$

$$Y = \frac{I_1 R_2 - R_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2}.$$

Рассмотренный алгоритм расчета значения  $X$ -вещественно-частотной и  $Y$ -мнимо-частотной характеристик амплитудно-фазовой характеристики (1.31) реализуем в подпрограмме UrGod.

```

procedure UrGod;
  Var b, Om, Om2, Z, Z2, E, F, R1, I1, R2, I2, S, C: real;
begin
  b:=lam/(A0*Delta);
  Om:=Delta*sqrt(w/(2*a)); Om2:=2*Om;
  Z:=Om*(1-Xx/Delta); Z2:=2*Z;
  if Z2<70
  then
    begin
      R1:=(1-exp(-Z2))*cos(z);
      I1:=-(1+exp(-Z2))*sin(z);
    end
  else
    begin
      R1:=cos(z); I1:=-sin(z)
    end;
  if Om2<70

```

```

then
  begin  E:=1+exp(-Om2); F:=1-exp(-Om2)
  end
else
  begin  E:=1; F:=1
  end;
S:=sin(Om); C:=cos(Om);
R2:=(E-b*Om*F)*C-b*Om*E*S;
I2:=(F+b*Om*E)*S+b*Om*F*C;
Z:=sqr(R2)+sqr(I2);
X:=(R1*R2+I1*I2)/Z;
Y:=(I1*R2-R1*I2)/Z
end;

```

В этой подпрограмме задействованы глобальные идентификаторы:  $\omega$  - частота;  $\text{Lam}$  - коэффициент теплопроводности  $\lambda$ ,  $\text{Delta}$  - толщина стенки  $\delta$ ,  $A$  - коэффициент температуропроводности  $a$ ;  $\text{AO}$  - коэффициент теплообмена на левой поверхности  $\alpha_0$ ,  $Xx$  - пространственная координата  $x$ ;  $X$  - значение вещественно-частотной характеристики,  $Y$  - значение мнимо-частотной характеристики. Локальные идентификаторы легко сопоставить с соответствующими им переменными.

## 1.2. Передаточные функции и частотные характеристики проточной емкости с толстыми теплоаккумулирующими стенками

Система дифференциальных уравнений данного объекта рассматривалась в работах [1, 22, 40, 41]. Там, в частности, рассматривался алгоритм и программная реализация численного метода интегрирования данной системы. Остановимся на алгоритме вывода передаточных функций.

При условии, что стенка, которая ограничивает емкость, внешне теплоизолирована, система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \frac{d\theta^0}{dt} + \theta^0 = b_1 \theta^{0,imp} + b_2 \theta|_{x=0}, \end{array} \right. \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (1.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (\theta^0 - \theta|_{x=0}), \end{array} \right. \quad (1.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0, \end{array} \right. \quad (1.40)$$

где  $T_0 = \frac{G_0 C_0}{Q_0 C_0 + \alpha_0 F_0}$ ,  $b_1 = \frac{Q_0 C_0}{Q_0 C_0 + \alpha_0 F_0}$ ,  $b_2 = 1 - b_1$ ,  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ .

Здесь:  $Q_0$  - расход теплоносителя через емкость;  $C_0$  - коэффициент теплоемкости теплоносителя;  $G_0$  - количество теплоносителя в емкости;  $F_0$  - поверхность теплообмена теплоносителя в емкости со стенкой;  $\alpha_0$  - коэффициент теплообмена между теплоносителем и стенкой;  $\delta$  - толщина стенки;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности материала стенки;  $a$  - коэффициент температуропроводности материала стенки;  $x$  - пространственная координата, которая отсчитывается от внутренней (той, что контактирует с теплоносителем в емкости) поверхности стенки, направлена она вглубь стенки, нормально к ее внутренней поверхности.

Кривизной стенки пренебрегаем, рассматривая ее для простоты как плоскую (считаем, что радиус кривизны большой сравнительно с ее толщиной  $\delta$ ). Дифференциальное уравнение (1.37) записано для теплоносителя, причем за

единый входной сигнал принята  $\theta^{0,inp}$  - температура теплоносителя на входе в емкость.

Дифференциальное уравнение (1.38) описывает процесс теплопроводности в стенке. Уравнения же (1.39) и (1.40) - это уравнения граничных условий. Мы умышленно взяли такую же комбинацию граничных условий, которую рассматривали при расчете частотных характеристик в предыдущем параграфе, чтобы удобно было сопоставлять результаты.

Чтобы определить передаточные функции выполним над системой (1.37)-(1.40) преобразование Лапласа (относительно  $t$ ) при нулевых начальных условиях.

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_0 p + 1)\bar{\theta}^0 = b_1 \bar{\theta}^{0,inp} + b_2 \bar{\theta}|_{x=0}, \end{array} \right. \quad (1.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - p \bar{\theta} = 0, \end{array} \right. \quad (1.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (\bar{\theta}^0 - \bar{\theta}|_{x=0}), \end{array} \right. \quad (1.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

Систему (1.42) - (1.44) можно решить относительно  $\bar{\theta}$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^0 W_{\theta^0 \rightarrow \theta(x)}(p). \quad (1.45)$$

Здесь  $W_{\theta^0 \rightarrow \theta}(p)$  не что иное, как передаточная функция (1.19). Подставим теперь (1.45) в (1.41) вместо  $\bar{\theta}|_{x=0}$ . Получим

$$(T_0 p + 1)\bar{\theta}^0 = b_1 \bar{\theta}^{0,inp} + b_2 W_0(p)\bar{\theta}^0. \quad (1.46)$$

Здесь  $W_0(p)$  - это передаточная функция (1.19) при  $x=0$ , то есть

$$W_0(p) = \frac{ch\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{ch\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} sh\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \quad (1.47)$$

Поделим числитель и знаменатель (1.47) на  $ch\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$ , будем иметь:

$$W_0(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} th\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \quad (1.48)$$

Решаем теперь (1.46) относительно  $\bar{\theta}^0$

$$\bar{\theta}^0 = \frac{b_1 \bar{\theta}^{0,inp}}{T_0 p + 1 - b_2 W_0(p)}. \quad (1.49)$$

Отсюда,

$$W_{\bar{\theta}^{0,inp} \rightarrow \theta^0}(p) = \frac{b_1}{T_0 p + 1 - b_2 W_0(p)}. \quad (1.50)$$

А передаточная функция для канала  $\theta^{0,inp} \rightarrow \theta(x)$  будет

$$W_{\theta^{0,inp} \rightarrow \theta(x)}(p) = W_{\bar{\theta}^{0,inp} \rightarrow \theta^0}(p) \cdot W_{\theta^0 \rightarrow \theta(x)}(p). \quad (1.51)$$

Частотные характеристики, соответствующие передаточной функции (1.19), были рассмотрены в предыдущем параграфе. Модифицируем приведенную там подпрограмму UrGod таким образом:

```

procedure UrGodst(X:real; var RI:real);
  Var b,Om, Om2,Z,Z2,E,F,R1,I1,R2,I2,S,C: real;
begin
  b:=lam/(A0*Delta);
  Om:=Delta*sqrt(w/(2*a));
  Om2:=2*Om;
  Z:=Om*(1-X/Delta);
  Z2:=2*Z;
  if Z2<70
  then
    begin
      R1:=(1-exp(-Z2))*cos(z);
      I1:=- (1+exp(-Z2))*sin(z);
    end
  else
    begin
      R1:=cos(z); I1:=-sin(z)
    end;
end;

```

```

if Om2<70
  then
    begin  E:=1+exp(-Om2);
           F:=1-exp(-Om2)
    end
  else
    begin
      E:=1; F:=1
    end;
  S:=sin(Om); C:=cos(Om);
  R2:=(E-b*Om*F)*C-b*Om*E*S;
  I2:=(F+b*Om*E)*S+b*Om*F*C;
  Z:=sqr(R2)+sqr(I2);
  R:=(R1*R2+I1*I2)/Z;
  I:=(I1*R2-R1*I2)/Z
end;

```

Если обозначить  $W_0(j\omega) = R_3 + jI_3$ , то заменяя в (1.47)  $p$  на  $j\omega$  получим

$$W_{\theta^0, inp \rightarrow \theta^0}(j\omega) = \frac{b_1}{1 + jT_0\omega - b_2(R_3 + jI_3)} = \frac{b_1[1 - b_2R_3 + j(T_0\omega - b_2I_3)]}{(1 - b_2R_3)^2 + (T_0\omega - b_2I_3)^2},$$

или 
$$W_{\theta^0, inp \rightarrow \theta^0}(j\omega) = R_4 + jI_4$$

где 
$$Z_n = (1 - b_2R_3)^2 + (T_0\omega - b_2I_3)^2;$$

$$R_4 = b_1(1 - b_2R_3 / Z_n);$$

$$I_4 = b_1(T_0\omega - b_2I_3 / Z_n).$$

Если теперь обозначить

$$W_{\theta^0 \rightarrow \theta(x)}(j\omega) = R_5 + jI_5,$$

а 
$$W_{\theta^0, inp \rightarrow \theta(x)}(j\omega) = R_6 + jI_6,$$

то 
$$R_6 + jI_6 = (R_4 + jI_4)(R_5 + jI_5)$$

то есть 
$$R_6 = R_4R_5 - I_4I_5,$$

$$I_6 = R_4I_5 + I_4R_5.$$

$R_3$  и  $I_3$  можно определить, вызывая процедуру UrGodSt таким образом UrGodSt(0, R3J3),  $R_5$  и  $I_5$  - аналогично UrGodSt(Xx, R5, I5).

Остальные вычисления - элементарные. В зависимости от нужного канала читатель может легко сформировать соответствующий вариант процедуры



UrGod для этого канала или ориентировать процедуру UrGod сразу на обслуживание ряда каналов каким либо образом пронумеровав их.

### 1.3. Динамика температуры в неизолированном цилиндрическом стержне

Рассмотрим теперь нестационарный тепловой режим относительно тонкого (то есть такого, где распределением температуры в границах поперечного сечения можно пренебречь) цилиндрического стержня. Для простоты будем считать, что цилиндр круговой, и ось  $X$  совпадает с осью цилиндра рис.1.1.

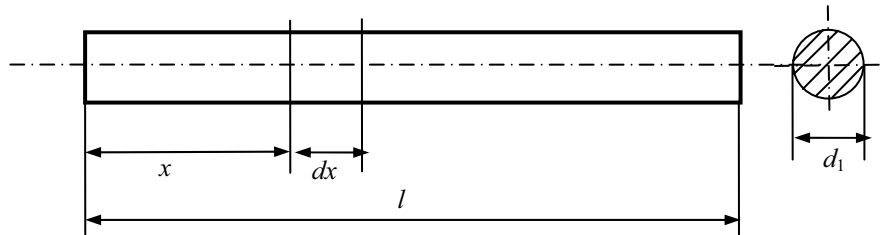


Рис.1.1. Расчетная схема цилиндрического стержня.

Составим уравнение элементарного теплового баланса для отрезка цилиндра между сечениями на расстоянии  $x$  и  $(x+dx)$  от его левого конца при условии, что его боковая поверхность обменивается теплом с окружающей средой (температура  $\theta^{oc}$ ) по закону конвекции (коэффициент теплообмена  $\alpha$ ).

$$-\lambda \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ -\lambda \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx \right] -$$

$$-\alpha \pi d_1 dx (\theta - \theta^{oc}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot dx \rho c \theta \right)$$

После упрощения будем иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{4\alpha}{\rho c d_1} (\theta - \theta^{oc}). \quad (1.52)$$

Введем обозначение

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{\rho c} = a, \\ \frac{4\alpha}{\rho c d_1} = b, \end{cases} \quad (1.53)$$

тогда (1.52) приобретает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - b(\theta - \theta^{oc}) \quad (1.54)$$

Граничные условия на торцах стержня задаются в зависимости от физических условий, в которых находится стержень. Примем для конкретности, что левый торец теплоизолирован (граничное условие 2-го рода), а правый находится в таких же условиях, как и его боковая поверхность (граничное условие 3-го рода, коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ). Получаем

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.55)$$

$$\left. -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha(\theta|_{x=l} - \theta^{oc}). \quad (2.56)$$

Для определения передаточной функции выполним преобразование Лапласа над (1.54), (1.55) и (1.56) при нулевых начальных условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} a \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - (p + b)\bar{\theta} = -b\bar{\theta}^{oc}, \end{array} \right. \quad (1.57)$$

$$\left. \frac{d\bar{\theta}}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (1.58)$$

$$\left. -\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dx} \right|_{x=l} = \alpha(\bar{\theta}|_{x=l} - \bar{\theta}^{oc}). \quad (1.59)$$

Здесь штрихи над обозначениями переменных указывают на операцию преобразования Лапласа.

Уравнение (1.57) - это обычное линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение может быть представлено так

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{вын} + \bar{\theta}_{своб}, \quad (1.60)$$

где  $\bar{\theta}_{вын}$  и  $\bar{\theta}_{своб}$  - вынужденная и свободная составляющие. Вынужденная составляющая определяется в форме правой части (1.57). Это константа, следовательно,  $\bar{\theta}_{вын}$  будем искать в виде константы

$$\bar{\theta}_{вын} = C = const. \quad (1.61)$$

Чтобы определить  $C$ , подставим  $\bar{\theta}_{вын}$  в (1.53) и поставим требование, чтобы при

этом (1.53) превратилось на тождество  $-(p+b)C = -b\bar{\theta}^{oc}$ , откуда

$$C = \frac{b}{p+b}\bar{\theta}^{oc}. \quad (1.62)$$

Структура  $\bar{\theta}_{своб}$  в (1.60) будет определяться корнями характеристического уравнения, которое отвечает (1.57). Характеристическое уравнение

$$ar^2 - (p+b) = 0, \quad (1.63)$$

его корни

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p+b}{a}}. \quad (1.64)$$

Итак,

$$\bar{\theta}_{своб} = C_1 e^{x\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{p+b}{a}}}. \quad (1.65)$$

Чтобы определить  $C_1$  и  $C_2$  сформируем сначала общее решение (1.60), подставив туда (1.61) и (1.62)

$$\bar{\theta} = \frac{b}{p+b}\bar{\theta}^{oc} + C_1 e^{x\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{p+b}{a}}}. \quad (1.66)$$

А теперь подставим (1.66) в (1.58) и (1.59)

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ -\lambda \sqrt{\frac{p+b}{a}} \left( C_1 e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} - C_2 e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} \right) = \alpha \left( \frac{b\bar{\theta}^{oc}}{p+b} + C_1 e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + C_2 e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} - \bar{\theta}^{oc} \right), \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \bar{\theta}^{oc} \frac{\frac{p}{p+b}}{e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p+b}{a}} \left( e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} - e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} \right)}$$

Подставляем найденные значения  $C_1$  и  $C_2$  в (1.66)

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{oc} \frac{b}{b+b} + \bar{\theta}^{oc} \frac{p}{p+b} \frac{e^{x\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + e^{-x\sqrt{\frac{p+b}{a}}}}{e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p+b}{a}} \left( e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} - e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} \right)}$$

Деля последнее выражение на  $\bar{\theta}^{oc}$  получаем передаточную функцию для канала “ $\theta^{oc} \rightarrow \theta(x)$ ”.

$$W_{\theta^{oc} \rightarrow \theta(x)}(p) = \frac{b}{p+b} \left\{ 1 + \frac{p}{b} \frac{e^{x\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + e^{-x\sqrt{\frac{p+b}{a}}}}{e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p+b}{a}} \left( e^{l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} - e^{-l\sqrt{\frac{p+b}{a}}} \right)} \right\}. \quad (1.67)$$

Для расчета частотных характеристик по передаточной функции (1.67) нужно как обычно выполнить подстановку  $p = j\omega$ .

Рассмотрим для начала комплекс, который многократно повторяется в (1.67), а именно  $\sqrt{\frac{p+b}{a}}$

$$\left. \sqrt{\frac{p+b}{a}} \right|_{p=j\omega} = \sqrt{\frac{j\omega+b}{a}} = R_1 + jI_1 \quad (1.68)$$

где  $R_1 = A_1 \cos(B_1)$ ,

$$I_1 = A_1 \sin(B_1),$$

где, в свою очередь,

$$A_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{a}};$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b}.$$

Дальнейшие преобразования (1.67) с учетом (1.68) предлагаем выполнить читателю самостоятельно.

## 1.4. Передаточные функции и частотные характеристики цилиндрической теплоаккумулирующей стенки

Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид [1, 15, 19, 20, 40, 55, 72, 87]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (1.69)$$

Выполним над ним преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\theta}}{dr} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = 0. \quad (1.70)$$

Выполним замену переменной  $r = \frac{x}{\sqrt{\frac{p}{a}}}$  тогда уравнения (1.70) после упрощения

приобретает вид

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\bar{\theta}}{dx} - \bar{\theta} = 0. \quad (1.71)$$

Это частный случай (при  $m=0$ ) так называемого модифицированного дифференциального уравнения Бесселя [7, 21]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left( 1 + \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (1.72)$$

Решение (1.72) принято представлять в виде

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (1.73)$$

где  $I_0$  и  $K_0(x)$  - модифицированные функции Бесселя I и II рода нулевого порядка. Разложение в ряд при малых значениях  $x$  для этих функций имеет вид

$$I_0(x) = 1 + \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots \quad (1.74)$$

$$K_0(x) = - \left( C + \ln \frac{x}{2} \right) I_0(x) + \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^4}{(2!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^6}{(3!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \quad (1.75)$$

где  $C=0.5772157\dots$  - постоянная Ейлера.

При больших значениях  $x$  асимптотические ряды имеют вид

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} + \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right) \quad (1.76)$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right) \quad (1.77)$$

Отметим поведение модифицированных функций Бесселя при предельных значениях аргумента

$$\begin{cases} I_0(x)|_{x \rightarrow 0} = 1; \\ I_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = \infty; \\ K_0(x)|_{x \rightarrow 0} = \infty; \\ K_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0. \end{cases} \quad (1.78)$$

Производные от  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  определяются так

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x). \quad (1.79)$$

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x). \quad (1.80)$$

Разложения в ряды для малых значений аргумента

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \dots \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} K_1(x) = \frac{1}{x} I_0(x) + \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) I_1(x) - \\ - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots - \end{aligned} \quad (1.82)$$

Асимптотические ряды (для больших значений  $x$ )

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right] \quad (1.83)$$

$$K_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[ 1 + \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right] \quad (1.84)$$

При предельных значениях аргумента функции  $I_1(x)$  и  $K_1(x)$  ведут себя

так

$$\begin{cases} I_1(x)|_{x=0} = 0, \\ I_1(x)|_{x=\infty} = \infty, \\ K_1(x)|_{x=0} = -\infty, \\ K_1(x)|_{x=\infty} = 0. \end{cases} \quad (1.85)$$

В соответствии с (1.73) решение дифференциального уравнения (1.70) будем искать в виде

$$\bar{\theta} = C_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (1.86)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  надо, по обыкновению, задать граничные условия. Договоримся обозначать граничное условие на внутренней поверхности цилиндра как  $Ngv$  (которое может принимать значения 1,2,3), на внешней поверхности - как  $Ngz$  (с возможными значениями 1,2,3). Цилиндр считаем в общем случае пустотелым, внутренний радиус  $r_0$ , внешний -  $r_1$ . Сплошной цилиндр будем рассматривать как частный случай при  $r_0 = 0$ . Граничным условием на оси сплошного цилиндра относительно одномерного дифференциального уравнения (1.69), будем рассматривать  $Ngv=2$  при нулевом значении теплового потока через "внутреннюю поверхность", то есть через ось (это будет фактически условие симметрии температурного поля относительно оси). Договоримся обозначать этот случай как  $Ngv=0$ . С него и начнем рассмотрение вариантов.

### Вариант 1

$Ngv=0$ ;  $Ngz=1$ . Граничные условия для дифференциального уравнения (1.70)

$$\begin{cases} \left. \frac{d\bar{\theta}}{dr} \right|_{r=0} = 0, \\ \bar{\theta}|_{r=r_1} = \bar{T}_z. \end{cases} \quad (1.87)$$

$$\bar{\theta}|_{r=r_1} = \bar{T}_z. \quad (1.88)$$

Подставим (1.86) в (1.87) и (1.88)



$$\left\{ \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 I_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\}_{r=0} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 K_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = 0, \quad (1.89)$$

$$\left\{ C_1 I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\}_{r=r_1} + C_2 K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=r_1} = \bar{T}_z. \quad (1.90)$$

Согласно (1.85)  $I_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = 0$ ,  $K_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = -\infty$ , тогда (1.89) может

удовлетворяться лишь при

$$C_2 = 0. \quad (1.91)$$

С учетом этого (1.90) дает  $C_1 I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = \bar{T}_z$ , откуда

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_z}{I_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.92)$$

Подставляем (1.91) и (1.92) в (1.86)

$$\bar{\theta} = \bar{T}_z \frac{I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{I_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.93)$$

Передаточная функция канала  $T_z \rightarrow \theta(r)$

$$W_{T_z \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{I_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.94)$$

## Вариант 2

$Ngv=0$ ,  $Ngz=2$ . Очевидно, что  $C_2 = 0$  как и в предыдущем случае, а для внешней поверхности получаем

$$-\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dr} \Big|_{r=r_1} = \bar{Q}_z \quad (1.95)$$

где  $\bar{Q}_z$  - изображение по Лапласу плотности теплового потока на внешней поверхности цилиндра (за положительное направление теплового потока принято направление возрастания радиуса).

Подставляем (1.86) при  $C_2 = 0$  в (1.95)

$$-\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 I_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=r_1} = \bar{Q}_z,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{\bar{Q}_z}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.96)$$

Итак, (1.86) приобретает вид

$$\bar{\theta} = -\bar{Q}_z \frac{I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.97)$$

Передаточная функция канала “ $Q_z \rightarrow \theta(r)$ ”

$$W_{Q_z \rightarrow \theta(r)}(p) = -\frac{I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.98)$$

Пусть теперь на внешней поверхности имеем граничное условие 3-го рода, то есть

### Вариант 3

$Ngv=0, Ngz=3$ . Граничное условие для внешней поверхности

$$-\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dr} \Big|_{r=r_1} = \alpha_1 \left( \bar{\theta} \Big|_{r=r_1} - \bar{T}_{sz} \right). \quad (1.99)$$

Подставляем (1.86) при  $C_2 = 0$  в (1.99)

$$-\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}C_1I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\alpha_1\left[C_1I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-\bar{T}_{sz}\right],$$

откуда

$$C_1=\frac{\bar{T}_{sz}}{\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (1.100)$$

Подставляем (1.100) в (1.86)

$$\bar{\theta}=\bar{T}_{sz}\frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (1.101)$$

Итак, передаточная функция канала “ $T_{sz} \rightarrow \theta(r)$ ” (температура теплоносителя, который омывает внешнюю поверхность - температура цилиндра в функции радиуса)

$$W_{T_{sz} \rightarrow \theta(r)}(p)=\frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (1.102)$$

#### Вариант 4

$Ngv=1, Ngz=1$ . Граничное условие для внутренней поверхности

$$\theta|_{r=r_0}=T_v(t), \quad (1.103)$$

для внешней поверхности

$$\theta|_{r=r_1}=T_z(t). \quad (1.104)$$

Подставляем (1.86) в (1.103) и (1.104)

$$\left\{C_1I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\bar{T}_v(p), \quad (1.105)\right.$$

$$\left. \left\{C_1I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\bar{T}_z(p), \quad (1.106)\right.\right.$$

Решение системы (1.105) - (1.106)

$$C_1 = \frac{\bar{T}_v(p)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \bar{T}_z(p)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)}. \quad (1.107)$$

$$C_2 = \frac{\bar{T}_z(p)I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \bar{T}_v(p)I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)}, \quad (1.108)$$

где

$$Zn(p) = I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Подставляем  $C_1$  и  $C_2$  из (1.107), (1.108) в (1.86)

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = \bar{T}_v(p) & \frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)} + \\ & + \bar{T}_z(p) \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)}, \end{aligned}$$

откуда

$$W_{T_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)}, \quad (1.109)$$

$$W_{T_z \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Zn(p)}. \quad (1.110)$$

Надеемся, что читатель понял алгоритм определения передаточных функций цилиндрической теплоаккумулирующей стенки, поэтому, рассмотрение остальных вариантов для стенки конечных размеров оставляем за читателем. Обратим внимание лишь на динамику цилиндрического канала в бесконечном массиве, когда  $r_1 = \infty$ ,  $r_0 \neq 0$ . Обозначим вариант с  $r_1 = \infty$  как  $Ngz=8$ .

### Вариант 5

$Ngv=1, Ngz=8$ . Как видно из формулы (1.86) при  $r = \infty$  температура  $\theta$  может быть конечной лишь при условии

$$C_1 = 0.$$

поскольку

$$I_0(0) = \infty.$$

Итак, решение (1.86) при  $Ngz=8$  приобретает вид

$$\bar{\theta} = C_2 K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (1.111)$$

Граничное условие на внутренней поверхности - это (1.103), итак,

$$C_2 = \frac{\bar{T}_v(p)}{K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$$

и

$$W_{T_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.112)$$

### Вариант 6

$Ngv=2, Ngz=8$

$$W_{Q_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (1.113)$$

### Вариант 7

$Ngv=3, Ngz=8$ .

$$W_{T_{sv} \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (2.114)$$

Для расчета частотных характеристик на базе передаточных функций цилиндрических стенок надо принимать во внимание такие соотношения

$$\begin{cases} I_0(x\sqrt{j}) = berx + jbeix, \\ \sqrt{j}I_1(x\sqrt{j}) = ber'x + jbei'x, \\ K_0(x\sqrt{j}) = kerx + jkeix, \\ \sqrt{j}K_1(x\sqrt{j}) = -(ker'x + jkei'x). \end{cases} \quad (1.115)$$

Функции  $ber(x)$ ,  $bei(x)$  (Bessel real, Bessel imagine),  $ker(x)$ ,  $kei(x)$  (Kelvin real, Kelvin imagine) еще называют функциями Томсона (Кельвина). Эти функции табулированы [7, 21, 91]. При  $x < 1$  их можно вычислять по таким формулами:

$$ber(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad (1.116)$$

$$bei(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \quad (1.117)$$

$$ker(x) = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) ber(x) + \frac{\pi}{4} bei(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \quad (1.118)$$

$$kei(x) = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) bei(x) + \frac{\pi}{4} ber(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}; \quad (1.119)$$

$$ber'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad (1.120)$$

$$bei'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \quad (1.121)$$

$$\begin{aligned} \ker'(x) = & -\frac{1}{x} \operatorname{ber}(x) + \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{ber}'(x) - \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}'(x) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \end{aligned} \quad (1.122)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{kei}'(x) = & -\frac{1}{x} \operatorname{bei}(x) + \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{bei}'(x) - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}'(x) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}; \end{aligned} \quad (1.123)$$

При  $x \geq 1$

$$\operatorname{ber}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.124)$$

$$\operatorname{bei}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.125)$$

$$\operatorname{ker}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ L_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.126)$$

$$\operatorname{kei}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.127)$$

$$\operatorname{ber}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.128)$$

$$\operatorname{bei}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.129)$$

$$\operatorname{ker}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (1.130)$$

$$\operatorname{kei}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]. \quad (1.131)$$

Тут

$$L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n! (8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad (1.132)$$

$$M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n! (8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad (1.133)$$

$$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n! (8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad (1.134)$$

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n! (8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad (1.135)$$

А теперь допустим, надо рассчитать частотные характеристики по передаточной функции (1.110).

$$W(j\omega) = \frac{I_0\left(r_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) K_0\left(r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) - K_0\left(r_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) I_0\left(r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right)}{I_0\left(r_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) K_0\left(r_1 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) - I_0\left(r_1 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right) K_0\left(r_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{j}\right)}. \quad (1.136)$$

Введем обозначение

$$\begin{cases} y_0 = r_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}}, \\ y_1 = r_1 \sqrt{\frac{\omega}{a}}, \\ y = r \sqrt{\frac{\omega}{a}}. \end{cases} \quad (1.137)$$

Тогда (1.136) записывается с учетом (1.115) так

$$W(j\omega) = \frac{W(\omega)}{D(\omega)}, \quad (1.138)$$

где

$$\begin{aligned} W(\omega) &= [ber(y_0) + jbei(y_0)][ker(y) + jkei(y)] - \\ &\quad - [ker(y_0) + jkei(y_0)][ber(y) + jker(y)], \\ D(\omega) &= [ber(y_0) + jbei(y_0)][ker(y_1) + jkei(y_1)] - \\ &\quad - [ber(y_1) + jbei(y_1)][ker(y_0) + jkei(y_0)] \end{aligned}$$

Выполняя умножение и группируя вещественные и мнимые части, формулы для  $W(\omega)$  и  $D(\omega)$  приведем к виду



$$\begin{cases} W(\omega) = R_1 + jI_1, \\ D(\omega) = R_2 + jI_2, \end{cases} \quad (1.139)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \operatorname{ber}(y_0)\operatorname{ker}(y) - \operatorname{bei}(y_0)\operatorname{kei}(y) - \operatorname{ker}(y_0)\operatorname{ber}(y) + \operatorname{kei}(y_0)\operatorname{ker}(y); \\ I_1 &= \operatorname{ber}(y_0)\operatorname{kei}(y) - \operatorname{bei}(y_0)\operatorname{ker}(y) - \operatorname{ker}(y_0)\operatorname{ber}(y) - \operatorname{kei}(y_0)\operatorname{ker}(y); \\ R_2 &= \operatorname{ber}(y_0)\operatorname{ker}(y_1) - \operatorname{bei}(y_0)\operatorname{kei}(y_1) - \operatorname{ber}(y_1)\operatorname{ker}(y_0) + \operatorname{bei}(y_1)\operatorname{kei}(y_0); \\ I_2 &= \operatorname{ber}(y_0)\operatorname{kei}(y_1) + \operatorname{bei}(y_0)\operatorname{ker}(y_1) - \operatorname{ber}(y_1)\operatorname{kei}(y_0) - \operatorname{bei}(y_1)\operatorname{ker}(y_0) \end{aligned}$$

И окончательно

$$W(j\omega) = R + jI, \quad (1.140)$$

где

$$R = \frac{R_1 R_2 - I_1 I_2}{Z_n},$$

$$I = \frac{I_1 R_2 - R_1 I_2}{Z_n},$$

в свою очередь

$$Z_n = R_2^2 + I_2^2.$$

Для реализации этого алгоритма надо иметь в распоряжении подпрограммы для вычисления функций  $\operatorname{ber}(x)$ ,  $\operatorname{bei}(x)$ ,  $\operatorname{ker}(x)$ ,  $\operatorname{kei}(x)$ , а в более общем случае также  $\operatorname{ber}'(x)$ ,  $\operatorname{bei}'(x)$ ,  $\operatorname{ker}'(x)$ ,  $\operatorname{kei}'(x)$ .

При необходимости эти подпрограммы пользователь может создать самостоятельно по приведенным выше формулам. Можно также воспользоваться таблицами соответствующих функций, сформировав на их базе интерполяционные структуры (полиномы, кубические сплайны или  $B$ -сплайны). Но авторы отдали бы преимущество численному интегрированию дифференциального уравнения (2.69) с соответствующими граничными условиями при единичном ступенчатом входном сигнале при нулевых начальных условиях. Таким образом можно было бы сформировать массив ординат переходной характеристики. Путем численного дифференцирования этот массив можно было бы пересчитать в массив ординат импульсной характеристики, а уже этот последний в вещественно- и мнимо-частотные характеристики. Такой алгоритм рассмотрен в [27].

## 1.5. Динамика температуры в зоне расплава червячного экструдера

Червячный экструдер (пресс, ЧП) представляет собой шнек (червяк) со спиральными каналами, помещенный в цилиндрический корпус. С одного конца шнека размещается загрузочная воронка, через которую в канал шнека подается перерабатываемый материал (полимер, резина), на противоположном конце - формирующая головка. Из формирующей головки материал отбирается (для формирования изделий из полимера, обкладки металлической жилы изолятором в производстве кабеля, и т.п.). Корпус цилиндра обогревается или охлаждается чтобы поддерживать определенное температурное поле вдоль оси машины. Для этого конструктивно оформляется ряд зон обогрева (охлаждения) установкой электрических нагревателей или охлаждающих устройств (обдув воздухом или омывание жидким теплоносителем). Шнек приводится во вращательное движение электрическим двигателем (через редуктор). Перерабатываемый материал захватывается шнеком и проталкивается в направлении формирующей головки. За счет тепла, которое передается полимеру со стороны нагретого корпуса, а также, за счет энергии диссипации (преобразования механической энергии привода в тепло при трении полимера с корпусом, с червяком и частичками полимера между собою) температура полимера повышается, он расплавляется, гомогенизируется, давление его повышается, что создает необходимые условия для его дальнейшей переработки в изделия.



Рис.1.2. Расчетная схема экструдера.

Для удобства управления тепловым режимом экструдера система его обогрева (охлаждения) разбивается конструктивно на ряд зон. Последней зоной (зоной расплава) есть зона непосредственно перед формирующей головкой. В зоне расплава перерабатываемый материал, должен быть доведен до состояния, оптимального для его переработки в изделия (материал должен быть полностью расплавлен, хорошо перемешан, иметь необходимую температуру и давление). На рассмотрении динамических свойств зоны расплава мы и остановимся. Расчетная схема экструдера показана на рис. 1.2.

Итак, в рассматриваемую зону, которая имеет длину  $L_z$ , входит нагреватель, участок корпуса, полимер (расплав) в границах зоны, червяк в границах зоны, а также охлаждающая червяк вода (червяк нужно охлаждать, чтобы обеспечить необходимое сцепление между материалом червяка и полимером для его перемешивания и проталкивание вперед). Рассмотрим элементарные тепловые балансы для отдельных аккумулирующих емкостей, входящих в состав зоны.

**Нагреватель.** Мощность нагревателя  $Q_n$ , его масса  $G_n$ , приведенный (усредненный) коэффициент теплоемкости материала, из которого он сделан, -  $C_n$ . Рассматриваем нагреватель как сосредоточенную тепловую емкость (есть, например, конструкции нагревателей, сделанные из специальных композитных материалов, через которые пропускается электрический ток, для них схема сосредоточенной тепловой емкости неплохо оправдывается). Поверхность контакта нагревателя с окружающей средой (воздухом)  $F_{os}$  коэффициент теплообмена  $\alpha_{os}$ , поверхность контакта нагревателя с корпусом равняется

$$F_1 = \pi D_1 L_z,$$

где  $D_1$  - внешний диаметр корпуса,  $L_z$  - длина зоны.

Примем, что между внешней поверхностью корпуса и нагревателем имеет место идеальный тепловой контакт (температуры на поверхности контакта одинаковы, термическое сопротивление нулевое). Тогда элементарный тепловой

баланс нагревателя можно представить так

$$Q_n - F_{os}(\theta_n - \theta_{os}) - \lambda F_1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R_1} = G_n C_n \frac{d\theta_n}{dt}. \quad (2.141)$$

Здесь  $\theta_n$  - температура нагревателя (усредненная),  $\theta_{os}$  - температура окружающей среды (воздух в помещении, где расположен ЧП),  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности материала корпуса ЧП (соответствующий идентификатор *Lam*).

Корпус ЧП представляем как пустотелый цилиндр с внутренним радиусом  $R_0$ . Передачу тепла в корпусе рассматриваем как задачу теплопроводности для цилиндра, причем тепловые потоки вдоль оси и за счет неравномерности теплового поля по периметру цилиндра опускаем как такие, что вносят незначительный вклад в суммарный баланс тепла (сравнительно с радиальным тепловым потоком). Итак, дифференциальное уравнение для корпуса представляем так

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (2.142)$$

Здесь  $\theta$  - температура корпуса (функция радиуса  $r$  и времени  $t$ ),  $a$  - коэффициент температуропроводности материала корпуса.

Граничное условие на внешней поверхности цилиндра, как уже упоминалось -1 рода,

$$\theta \Big|_{r=R_1} = \theta_n. \quad (1.143)$$

На внутренней поверхности примем, что имеет место теплообмен с полимером (расплав), который может быть охарактеризован некоторым (расчетным, усредненным) коэффициентом теплоотдачи  $A_k$ . Поверхность теплообмена в границах зоны

$$F_o = \pi D_0 * L_z.$$

Итак, на внутренней поверхности корпуса имеем граничное условие III рода

$$-\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R_o} = A_k (\theta_p - \theta|_{r=R_o}) \quad (1.144)$$

Полимер (расплав) рассматриваем как сосредоточенную тепловую емкость. Расход полимера через зону  $Q_p$ , его теплоемкость  $C_p$ , его масса в границах зоны  $G_p$ . Полимер получает тепло от корпуса. Кроме того полимер обменивается теплом с червяком (считаем, что коэффициент теплообмена полимера с червяком  $A_p$ ), поверхность теплообмена  $F_p$ . Кроме этого в полимере выделяется тепло за счет энергии диссипации (рассеяния) энергии привода. Полимер при вращении червяка интенсивно перемешивается, в результате чего выделяется какое-то тепло. Чтобы определить зависимость тепловыделения от конструкции червяка (его геометрии, состояния поверхности), скорости вращения червяка, характеристик полимера, его температуры и других параметров надо углубиться в особенности конкретного производства, что выходит за рамки данной работы. Примем, что в рассмотренной зоне (зоне расплава) полимер находится уже в расплавленном состоянии, его вязкость достаточно маленькая, тепловыделения можно ожидать относительно небольшое, больше того, в узком диапазоне температур (а мы надеемся, что создаваемое нами система автоматизированного управления тепловым режимом “побеспокоится” о том, чтобы диапазон допустимых вариаций температуры полимера был в самом деле достаточно узким) тепловыделение, если и будет ненулевым, то по крайней мере его доля будет маленькой. Тогда с учетом сказанного, тепловой баланс для полимера в границах зоны будет выглядеть так

$$Q_p c_p \theta_p^{inp} - Q_p c_p \theta_p + A_k F_o (\theta|_{r=R_o} - \theta_p) - A_p F_p (\theta_p - \theta_c) = G_p c_p \frac{d\theta_p}{dt}. \quad (1.145)$$

Здесь кроме прежде упоминавшихся:  $\theta_p^{inp}$  - температура полимера на входе в зону;  $\theta_c$  - температура червяка.

Червяк в границах зоны рассматриваем как сосредоточенную тепловую емкость. Он получает тепло от полимера, а отдает его охлаждающей воде.

Масса червяка в границах зоны  $G_c$ , коэффициент теплоемкости его материала  $c_c$ , коэффициент теплоотдачи от червяка к воде  $A_v$ , поверхность теплообмена с водой  $F_v$ .

Итак, его тепловой баланс

$$A_p F_p (\theta_p - \theta_c) - A_v F_v (\theta_c - \theta_v) = G_c c_c \frac{d\theta_c}{dt}. \quad (1.146)$$

Здесь  $\theta_v$  - температура воды.

Полученные дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия можно свести в систему, которая после очевидных преобразований может быть представлена так

$$\left\{ \begin{array}{l} T_n \frac{d\theta_n}{dt} + \theta_n = k_n Q_n + \theta_{os} + k_1 \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \\ \theta|_{r=R_1} = \theta_n, \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = A_k (\theta_p - \theta), \\ T_p \frac{\partial \theta_p}{\partial t} + \theta_p = k_{inp} \theta^{p,inp} + k_0 \theta + k_c \theta^n, \\ T_c \frac{\partial \theta_c}{\partial t} + \theta_c = k_p \theta_p + k_v \theta_v, \end{array} \right. \quad (1.147)$$

$$T_n = \frac{G_n C_n}{F_{os} A_{os}}; \quad k_n = \frac{1}{F_{os} A_{os}};$$

$$T_p = \frac{G_p C_p}{Q_p C_p + A_k F_o + A_p F_p}; \quad k_{inp} = \frac{G_p C_p}{Q_p C_p + A_k F_o + A_p F_p};$$

$$k_o = \frac{A_k F_o}{Q_p C_p + A_k F_o + A_p F_p}; \quad k_c = \frac{A_k F_o}{Q_p C_p + A_k F_o + A_p F_p} = 1 - k_{inp} - k.$$

$$T_c = \frac{G_c C_c}{A_p F_p + A_v F_v};$$

$$k_p = \frac{A_p F_p}{A_p F_p + A_v F_v}; \quad k_v = \frac{A_v F_v}{A_p F_p + A_v F_v} = 1 - k_p.$$

Переведем теперь систему (1.141) в дискретную форму. Для этого введем обозначения

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_n|_{t=\nu\tau} = Q_{n,\nu} \quad , \\ \theta_n|_{t=\nu\tau} = \theta_{n,\nu} \quad , \\ \theta_{os}|_{t=\nu S} = \theta_{os,\nu} \quad , \\ \theta|_{\substack{r=R_0+sh \\ t=\nu\tau}} = \theta_{s,\nu} \quad , \\ \theta_p|_{t=\nu\tau} = \theta_{p,\nu} \quad , \\ \theta_c|_{t=\nu\tau} = \theta_{c,\nu} \quad , \end{array} \right. \quad (2.148)$$

где  $h = \frac{R_1 - R_0}{m}$  - шаг вдоль радиуса в корпусе ЧП.

Если в (1.147) заменить производные по времени через разностные соотношения вперед и решить полученные разностные уравнения относительно значений температур в момент времени  $t = (\nu + 1)\tau$ , то получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{n,\nu+1} = \theta_{n,\nu} + \frac{\tau}{T_n} \left[ -\theta_{n,\nu} + k_n \theta_{n,\nu} + \theta_{os,\nu} + k_1 (\theta_{m,\nu} - \theta_{m-1,\nu}) \right] \\ \theta_{s,\nu+1} = q_1 \theta_{s,\nu} + q \left[ (1 - r_s) \theta_{s-1,\nu} + (1 + r_s) \theta_{s+1,\nu} \right] \\ \theta_{m,\nu+1} = \theta_{n,\nu+1} \\ \theta_{o,\nu+1} = b_o \theta_{1,\nu+1} + b_1 \theta_{p,\nu+1} \\ \theta_{p,\nu+1} = \theta_{p,\nu} + \frac{\tau}{T_p} \left[ -\theta_{p,\nu} + k_{inp} \theta_{p,\nu}^{inp} + k_o \theta_{o,\nu} + k_c \theta_{c,\nu} \right] \\ T_{c,\nu+1} = \theta_{c,\nu} + \frac{\tau}{T_c} \left[ -\theta_{c,\nu} + k_p \theta_{p,\nu} + k_v \theta_{v,\nu} \right] \end{array} \right. \quad (2.149)$$

где  $\tau$  - шаг по времени,

$$q = \frac{a\tau}{h^2}, \quad q_1 = 1 - 2q,$$

$$r_s = \frac{1}{2\left(\frac{R_o}{h} + S\right)},$$

$$b_o = \frac{\lambda}{\lambda + hA_k},$$

$$b_1 = 1 - B_0.$$

Значения  $q$  (поскольку мы имеем дело по сути с явной схемой интегрирования уравнения теплопроводности), очевидно, следует выбрать в окрестности  $q = \frac{1}{6}$ , но с учетом того, чтобы шаг  $\tau$  не превышал одну десятую наименьшей из постоянных времени  $T_n, T_p, T_c$ . Последнее требование не является строгим, но его можно использовать для первого приближения, уточняя потом шаг  $\tau$  с использованием принципа Рунге. Шаг по времени для зоны можно представить процедурой `StepT`.

```

Procedure StepT;
Var s; integer;
    NTetn, NTetp, NTetc, Rs: real;
    NTeta: Coef;
Begin
    Ntetn := Tetn + Tau / Tn * (-Tetn + kn * Qn + Tos + k1 * (Teta[m] -
        Teta[m-1]));
    Ntetp := Tetp + Tau / Tp * (-
        Tetp + Kinp * Tetpinp + k0 * Teta[0] + kc * Tetc);
    Ntetc := Tetc + Tau / Tc * (-Tetc + kp * Tetp + kv * Tetv);
    For S := 1 to m-1 do
        Begin
            Rs := 1 / (2 * (R0 / H + S));
            Nteta[S] := q1 * Teta[S] + q * ((1 - Rs) * Teta[s-1]
                + (1 + Rs) * Teta[s+1]);
        End;
    Nteta[m] := Ntetn; Nteta[-1] := m;
    Nteta[0] := B0 * Teta[1] + B1 * Nte0;
    Teta := Nteta; Tetn := Ntetn;
    Tetp := Ntetp; Tetc := Ntetc;
End;

```



## 1.6. Динамические характеристики тонкостенного трубопровода по температурным каналам

Пусть имеем трубопровод, расчетная схема которого показана на рис. 1.3.

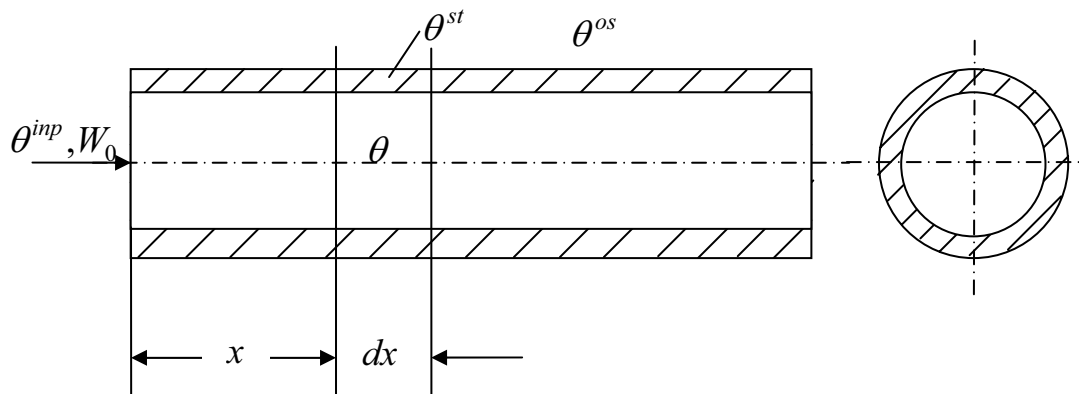


Рис. 1.3. Расчетная схема трубопровода с тонкими теплоаккумулирующими стенками.

Расчет переходных процессов в подобном объекте рассматривается в [40].

Система дифференциальных уравнений, выведенная там, имеет такой вид

$$\begin{cases} T_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 W_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta = \theta^{st}, & (1.150) \\ T_{st} \frac{\partial \theta^{st}}{\partial t} + \theta^{st} = b_0 \theta + b_1 \theta^{os}. & (1.151) \end{cases}$$

Граничное условие для теплоносителя

$$\theta|_{x=0} = \theta^{inp}. \quad (1.152)$$

Выполним над (1.150), (1.151) и (1.152) преобразование Лапласа относительно  $t$  при нулевых начальных условиях.

$$T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}}{dx} + (T_0 p + 1)\bar{\theta} = \bar{\theta}^{st}, \quad (2.153)$$

$$(T_{st} p + 1)\bar{\theta}^{st} = b_0 \bar{\theta} + b_1 \bar{\theta}^{os}, \quad (2.154)$$

$$\bar{\theta}|_{x=0} = \bar{\theta}^{inp}. \quad (2.155)$$

Здесь штрихи над переменными указывают на изображение по Лапласу этих переменных.

Решим сначала систему (1.153) - (1.155) относительно  $\bar{\theta}$ . Для этого подставим  $\bar{\theta}^{st}$  из (1.153) в (1.154)

$$(T_{st}p + 1) \left[ T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}}{dx} + (T_0 p + 1) \bar{\theta} \right] = b_0 \bar{\theta} + b_1 \bar{\theta}^{os}$$

или

$$(T_{st}p + 1) T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}}{dx} + [(T_0 p + 1)(T_{st}p + 1) - b_0] \bar{\theta} = b_1 \bar{\theta}^{os} \quad (1.156)$$

Характеристическое уравнение, которое отвечает (1.156),

$$(T_{st}p + 1) T_0 W_0 r + [(T_0 p + 1)(T_{st}p + 1) - b_0] = 0$$

Оно имеет решение (корень)

$$r_1 = - \left( p + \frac{1}{T_0} \right) \frac{1}{W_0} + \frac{b_0}{(T_{st}p + 1) T_0 W_0}. \quad (1.157)$$

Решение (1.156) имеет вид

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\text{вын}} + \bar{\theta}_{\text{своб}} \quad (1.158)$$

Компонента  $\bar{\theta}_{\text{вын}}$  ищется в виде правой части (1.156). Правая часть не зависит от  $x$ ,

$$\bar{\theta}_{\text{вын}} = C = \text{const} \quad (1.159)$$

Подставляем (1.159) в (1.156)

$$[(T_0 p + 1)(T_{st}p + 1) - b_0] C = b_1 \bar{\theta}^{os},$$

отсюда

$$C = \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st}p + 1) - b_0}. \quad (1.160)$$

Свободная составляющая решения (1.158) определяется (1.157) и имеет вид

$$\bar{\theta}_{\text{своб}} = C_1 e^{r_1 x}. \quad (1.161)$$

Все же решение (1.156) с учетом (1.160)

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st}p + 1) - b_0} + C_1 e^{r_1 x}. \quad (1.162)$$

Подставляем (1.162) в (1.155). Получаем

$$\bar{\theta}^{inp} = \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0} + C_1,$$

отсюда

$$C_1 = \bar{\theta}^{inp} - \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0}$$

и окончательно (1.162)

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0} + \left[ \bar{\theta}^{inp} - \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0} \right] e^{r_1 x}$$

или после перегруппировки

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{os} \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0} (1 - e^{r_1 x}) + \bar{\theta}^{inp} e^{r_1 x}. \quad (1.163)$$

Обозначаем

$$W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta}(p, x) = e^{r_1 x} = e^{-\frac{\tau}{T_0}} e^{-p\tau} e^{\frac{b_0}{T_{st} p + 1} \frac{\tau}{T_0}}$$

где

$$\tau = \frac{x}{W_0}.$$

Тогда

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta}(p, x) = \frac{b_1}{(T_0 p + 1)(T_{st} p + 1) - b_0} [1 - W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta}(p, x)].$$

Итак, (1.163) приобретает вид

$$\bar{\theta} = W_{\theta^{os} \rightarrow \theta}(p, x) \bar{\theta}^{os} + W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta}(p, x) \bar{\theta}^{inp}. \quad (1.164)$$

Подставляем (1.164) в (1.154) и решаем его относительно  $\bar{\theta}^{st}$ .

$$\bar{\theta}^{st} = \frac{b_0}{T_{st} p + 1} [W_{\theta^{os} \rightarrow \theta}(p, x) \bar{\theta}^{os} + W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta}(p, x) \bar{\theta}^{inp}] + \frac{b_1}{T_{st} p + 1} \bar{\theta}^{os},$$

отсюда

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^{st}}(p, x) = \frac{1}{T_{st} p + 1} [b_0 W_{\theta^{os} \rightarrow \theta}(p, x) + b_1] \quad (1.165)$$

и

$$W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta^{st}}(p, x) = \frac{b_0}{T_{st} p + 1} W_{\theta^{inp} \rightarrow \theta}(p, x). \quad (1.166)$$

Очевидно, при расчете частотных характеристик по передаточным функциям (1.17) - (1.20) никаких проблем не возникает.

## 1.7. Динамика прямоточного теплообменника типа труба в трубе

Примем за основу модель такого теплообменника, который рассматривался в [1, 40]. Его расчетная схема показана на рис.2.4.

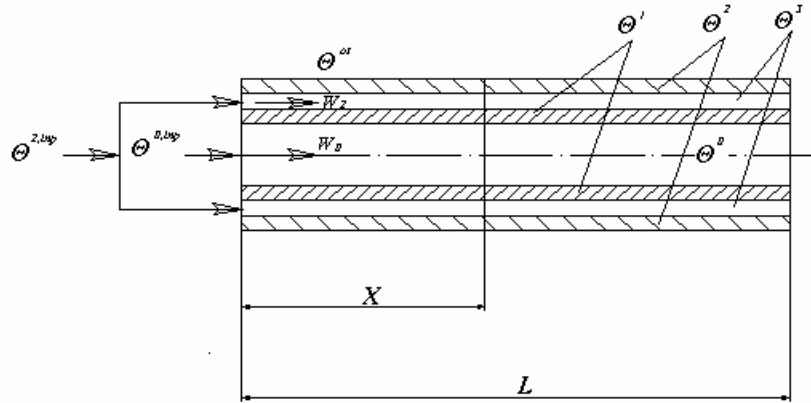


Рис.2.4. Расчетная схема прямоточного теплообменника.

Система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial t} + T_0 W_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + \theta^0 = \theta^1, \end{array} \right. \quad (1.167)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{\partial \theta^1}{\partial t} + \theta^1 = b_1 \theta^0 + b_2 \theta^2, \end{array} \right. \quad (1.168)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 \frac{\partial \theta^2}{\partial t} + T_2 W_2 \frac{\partial \theta^2}{\partial x} + \theta^2 = b_3 \theta^1 + b_4 \theta^3, \end{array} \right. \quad (1.169)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 \frac{\partial \theta^3}{\partial t} + \theta^3 = b_5 \theta^2 + b_6 \theta^{os}, \end{array} \right. \quad (1.170)$$

Граничные условия

$$\theta^0 \Big|_{x=0} = \theta^{o,imp}, \quad (1.171)$$

$$\theta^2 \Big|_{x=0} = \theta^{2,imp}. \quad (1.172)$$

Выполним над уравнениями (1.167) - (1.172) преобразование Лапласа относительно  $t$  при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1)\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}^1, & (1.173) \\ (T_1 p + 1)\bar{\theta}^1 = b_1 \bar{\theta}^0 + b_2 \bar{\theta}^2, & (1.174) \\ T_2 W_2 \frac{d\bar{\theta}^2}{dx} + (T_2 p + 1)\bar{\theta}^2 = b_3 \bar{\theta}^1 + b_4 \bar{\theta}^3, & (1.175) \\ (T_3 p + 1)\bar{\theta}^3 = b_5 \bar{\theta}^2 + b_6 \bar{\theta}^{os}, & (1.176) \end{cases}$$

$$\bar{\theta}^0 \Big|_{x=0} = \bar{\theta}^{0,inp}, \quad (1.177)$$

$$\bar{\theta}^2 \Big|_{x=0} = \bar{\theta}^{2,inp}. \quad (1.178)$$

Определим  $\bar{\theta}_1$  из (1.174)

$$\bar{\theta}^1 = \frac{b_1}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^0 + \frac{b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2, \quad (1.179)$$

а  $\bar{\theta}^3$  из (1.176)

$$\bar{\theta}^3 = \frac{b_5}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^2 + \frac{b_6}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^{os}. \quad (1.180)$$

Подставим теперь (1.179) в (1.173) и (1.175)

$$\begin{cases} T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1})\bar{\theta}^0 = \frac{b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2, & (1.181) \\ T_2 W_2 \frac{d\bar{\theta}^2}{dx} + (T_2 p + 1 - \frac{b_3 b_2}{T_1 p + 1} - \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1})\bar{\theta}^2 = \frac{b_3 b_1}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^0 + \frac{b_4 b_6}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^{os}, & (1.182) \end{cases}$$

Теперь можно, например, определить  $\bar{\theta}^2$  из (1.181)

$$\bar{\theta}^2 = \frac{T_1 p + 1}{b_2} \left[ T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1})\bar{\theta}^0 \right] \quad (1.183)$$

и подставить его в (1.175)

$$\begin{aligned}
& T_2 W_2 \frac{T_1 p + 1}{b_2} \left[ T_0 W_0 \frac{d^2 \bar{\theta}^0}{dx^2} + \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) \frac{d \bar{\theta}^0}{dx} \right] + \\
& + \frac{T_1 p + 1}{b_2} \left( T_2 p + 1 - \frac{b_2 b_3}{T_1 p + 1} - \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1} \right) \times \\
& \times \left[ T_0 W_0 \frac{d \bar{\theta}^0}{dx} + \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) \bar{\theta}^0 \right] = \frac{b_2 b_3}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^0 + \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^{os},
\end{aligned} \tag{1.184}$$

Вводим обозначения

$$\begin{cases}
a_2(p) = T_0 W_0 T_2 W_2 \frac{T_1 p + 1}{b_2}, \\
a_1(p) = T_0 W_0 \left( T_2 p + 1 - \frac{b_3 b_2}{T_1 p + 1} - \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1} \right) + T_2 W_2 \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) \frac{T_1 p + 1}{b_2}, \\
a_0(p) = \frac{T_1 p + 1}{b_2} \left( T_2 p + 1 - \frac{b_3 b_2}{T_1 p + 1} - \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1} \right) \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) - \frac{b_3 b_1}{T_1 p + 1}; \\
b_{os}(p) = \frac{b_4 b_5}{T_3 p + 1}.
\end{cases} \tag{1.185}$$

Тогда (1.184) можно будет записать так

$$a_2(p) \frac{d^2 \bar{\theta}^0}{dx^2} + a_1(p) \frac{d \bar{\theta}^0}{dx} + a_0(p) \bar{\theta}^0 = b_{os}(p) \bar{\theta}^{os}. \tag{1.186}$$

Решение (1.186)

$$\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}_{вын}^0 + \bar{\theta}_{своб}^0. \tag{1.187}$$

Очевидно, что

$$\bar{\theta}_{вын}^0 = \frac{b_{os}(p)}{a_0(p)} \bar{\theta}^{os}. \tag{1.188}$$

Чтобы записать выражение для  $\bar{\theta}_{своб}^0$  надо сначала сформировать характеристическое уравнение для (1.186). Это будет выглядеть так

$$a_2(p) r^2 + a_1(p) r + a_0(p) = 0. \tag{1.189}$$

Его корни

$$r_{1,2}(p) = \frac{-a_1(p) \pm \sqrt{a_1^2(p) - 4a_2(p)a_0(p)}}{2a_2(p)}. \tag{1.190}$$

Итак, полное решение (1.187)

$$\bar{\theta}^0 = \frac{B_{os}(p)}{a_0(p)} \bar{\theta}^{os} + C_1(p)e^{r_1 x} + C_2(p)e^{r_2 x}. \quad (1.191)$$

Чтобы определить постоянные интегрирования  $C_1(p)$  и  $C_2(p)$  воспользуемся граничными условиями (1.177), (1.178). Для реализации (1.178) целесообразно учесть (1.183)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}^{0,imp} = \frac{b_{os}(p)}{a_0(p)} \bar{\theta}^{os} + C_1(p) + C_2(p), \\ \bar{\theta}^{2,imp} = \frac{T_1 p + 1}{b_2}. \end{array} \right. \quad (1.192)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [T_0 W_0 [C_1(p)r_1(p) + C_2(p)r_2(p)] + \\ + \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) \left[ \frac{b_{os}(p)}{a_0(p)} \bar{\theta}^{os} C_1(p) + C_2(p) \right]] \end{array} \right\}. \quad (1.193)$$

Систему (1.192) - (1.193) относительно  $C_1(p)$  и  $C_2(p)$  решить можно, потом полученное решение надо подставить в (1.191), откуда просто определяются передаточные функции каналов “ $\theta^{os} \rightarrow \theta^0(x)$ ”, “ $\theta^{0,imp} \rightarrow \theta^0(x)$ ”, “ $\theta^{2,imp} \rightarrow \theta^0(x)$ ”.

Аналогичным образом могут быть определены передаточные функции с входными сигналом  $\theta^2$ . Будут решения относительно  $\bar{\theta}^0$  и  $\bar{\theta}^2$ , их можно подставить в (1.179), (1.180) и получить соответственно передаточные функции с выходами  $\theta^1$  и  $\theta^3$ . Тем самым, задача определения передаточных функций рассмотренного объекта решается однозначно. Но мы это решение не приводим. Понятно, что и пользоваться этим решением практически нецелесообразно.

Несравненно проще численно проинтегрировать систему (1.167) - (1.172) с целью получить переходную характеристику  $h(t)$  нужного канала, пересчитать потом  $h(t)$  в импульсную характеристику  $g(t)$ , а уже потом через  $h(t)$  или через  $g(t)$  рассчитать частотные характеристики. В подобной ситуации как раз уместной является фраза из известного фильма: "Нормальные герои всегда идут в обход!". Формулы для передаточных функций и их частотных характеристик для упрощенного варианта рассмотренного теплообменника (когда  $T_1=T_3=0$ , то есть когда не учитывается инерционность стенок теплообменника) приведены в

[86].

Для противоточного теплообменника в дифференциальном уравнении (1.169) надо заменить знак перед слагаемым с  $W_2$  на противоположный, а также заменить граничные условие (1.172) на

$$\theta^2 \Big|_{x=l} = \theta^{2,inp},$$

где  $l$  - длина теплообменника. Схема же расчета остается такой, как и только что рассмотренная.



## 1.8. Динамические характеристики змеевикового теплообменника

В [26, 28, 40, 41, 39] приведена расчетная модель рассматриваемого теплообменника ( рис. 2.5 )

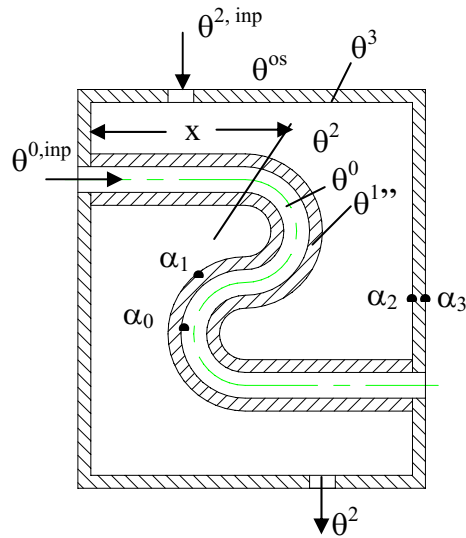


Рис.2.5. Змеевиковый теплообменник.

Там получается такая система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial t} + T_0 W_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + \theta^0 = \theta^1, \end{array} \right. \quad (1.194)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{\partial \theta^1}{\partial t} + \theta^1 = b_1 \theta^0 + b_2 \theta, \end{array} \right. \quad (1.195)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 \frac{d\theta^2}{dt} + \theta^2 = b_3 \int_0^L \theta^1 dx + b_5 \theta^{2,inp} + b_6 \theta^3, \end{array} \right. \quad (1.196)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 \frac{d\theta^3}{dt} + \theta^3 = b_7 \theta^2 + b_8 \theta^{os}, \end{array} \right. \quad (1.197)$$

Граничные условия

$$\theta^0 \Big|_{x=0} = \theta^{0,inp}, \quad (1.198)$$

$$T_0 = \frac{s_0 \rho_0 C_0}{\alpha_0 p_0}; \quad T_1 = \frac{s_1 \rho_1 C_1}{\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1}; \quad T_2 = \frac{G_2 C_2}{Q_2 C_2 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2}; \quad T_3 = \frac{G_3 C_3}{\alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3};$$

здесь

$$b_1 = \frac{\alpha_0 p_0}{\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1}; \quad b_2 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1} = 1 - G_1; \quad b_2 = \frac{\alpha_1 p_1}{Q_2 C_2 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2};$$

$$b_4 = b_3 m h; \quad b_5 = \frac{Q_2 C_2}{Q_2 C_2 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2}; \quad b_6 = \frac{\alpha_2 F_2}{Q_2 C_2 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2} = 1 - b_4 - b_5;$$

$$b_7 = \frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3}; \quad b_8 = \frac{\alpha_3 F_3}{\alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3} = 1 - b_7;$$

Выполним над (1.194) - (1.198) преобразование Лапласа относительно времени  $t$  при нулевых начальных условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1)\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}^1, \end{array} \right. \quad (1.199)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_1 p + 1)\bar{\theta}^1 = b_1 \bar{\theta}^0 + b_2 \bar{\theta}^2, \end{array} \right. \quad (1.200)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_2 p + 1)\bar{\theta}^2 = b_3 \int_0^L \bar{\theta}^1 dx + b_5 \bar{\theta}^{2, \text{inp}} + b_6 \bar{\theta}^3, \end{array} \right. \quad (1.201)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_3 p + 1)\bar{\theta}^3 = b_7 \bar{\theta}^2 + b_8 \bar{\theta}^{\text{os}}, \end{array} \right. \quad (1.202)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^0|_{x=0} = \bar{\theta}^{0, \text{inp}}. \end{array} \right. \quad (1.203)$$

Определим  $\bar{\theta}^1$  из (1.200)

$$\bar{\theta}^1 = \frac{b_1}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^0 + \frac{b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2 \quad (1.204)$$

и подставим теперь его в (1.199)

$$T_0 W_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) \bar{\theta}^0 = \frac{b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2. \quad (1.205)$$

Температура  $\bar{\theta}^2$  - это температура теплоносителя в емкости, она не является функцией от  $x$ . Итак, уравнение может быть решено. Характеристическое уравнение, соответствующие (1.205)

$$T_0 W_0 r(p) + \left( T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1} \right) = 0. \quad (1.206)$$

Его корень

$$r(p) = -\frac{T_0 p + 1 - \frac{b_1}{T_1 p + 1}}{T_0 W_0}. \quad (1.207)$$

Решение (1.205)

$$\bar{\theta}^0 = f(p)\bar{\theta}^2 + D(p)e^{r_1(p)x}, \quad (1.208)$$

где

$$f(p) = \frac{b_2}{(T_0 p + 1)(T_1 p + 1) - b_1}$$

Чтобы определить  $D(p)$  подставим (1.208) в (1.203)

$$\bar{\theta}^{0,inp} = f(p)\bar{\theta}^2 + D(p),$$

откуда

$$D(p) = \bar{\theta}^{0,inp} - f(p)\bar{\theta}^2. \quad (1.209)$$

Итак, решение (1.208)

$$\bar{\theta}^0 = f(p)\bar{\theta}^2 + [\bar{\theta}^{0,inp} - f(p)\bar{\theta}^2]e^{r_1(p)x}. \quad (1.210)$$

Подставим теперь (1.210) в (1.204)

$$\bar{\theta}^1 = \frac{b_1}{T_1 p + 1} \left\{ f(p)\bar{\theta}^2 + [\bar{\theta}^{0,inp} - f(p)\bar{\theta}^2]e^{r_1(p)x} \right\} + \frac{b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2$$

или

$$\bar{\theta}^1 = \frac{b_1 f(p) + b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2 + \frac{b_1}{T_1 p + 1} [\bar{\theta}^{0,inp} - f(p)\bar{\theta}^2]e^{r_1(p)x}. \quad (1.211)$$

Теперь надо подставить  $\bar{\theta}^1$  из (1.211) в (1.201) и заменить в (1.201)  $\bar{\theta}^3$  через его значение из (1.202)

$$\begin{aligned} (T_2 p + 1)\bar{\theta}^2 &= b_3 l \frac{b_1 f(p) + b_2}{T_1 p + 1} \bar{\theta}^2 + \frac{b_1}{T_1 p + 1} [\bar{\theta}^{0,inp} - f(p)\bar{\theta}^2] \frac{e^{r_1(p)x}}{r_1(p)} + \\ &+ b_5 \bar{\theta}^{2,inp} + \frac{b_6 b_7}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^2 + \frac{b_6 b_8}{T_3 p + 1} \bar{\theta}^{os}. \end{aligned} \quad (1.212)$$

Решим теперь (1.212) относительно  $\bar{\theta}^2$

$$\bar{\theta}^2 = W_{\theta^{0,inp} \rightarrow \theta^2}(p)\bar{\theta}^{0,inp} + W_{\theta^{2,inp} \rightarrow \theta^2}(p)\bar{\theta}^{2,inp} + W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^2}(p)\bar{\theta}^{os}, \quad (1.213)$$

где

$$W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p) = \frac{b_1 e^{r_1(p)l}}{(T_1 p + 1) r_1(p) f_2(p)}, \quad (1.214)$$

$$W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p) = \frac{b_5}{f_2(p)}, \quad (1.215)$$

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^2}(p) = \frac{b_6 b_8}{(T_3 p + 1) f_2(p)}, \quad (1.216)$$

где, в свою очередь,

$$f_2(p) = (T_2 p + 1) - b_3 l \frac{b_1 f(p) + b_2}{(T_1 p + 1)} + \frac{b_1}{(T_1 p + 1)} f(p) \frac{e^{r_1(p)l}}{r_1(p)} - \frac{b_6 b_7}{(T_3 p + 1)}.$$

Подставляем теперь  $\bar{\theta}^2$  из (1.213) в (1.203), откуда

$$\bar{\theta}^3 = W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^3}(p) \bar{\theta}^{0, \text{inp}} + W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^3}(p) \bar{\theta}^{2, \text{inp}} + W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^3}(p) \bar{\theta}^{os}, \quad (1.217)$$

где

$$W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^3}(p) = \frac{b_7}{(T_3 p + 1)} W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p), \quad (1.218)$$

$$W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^3}(p) = \frac{b_7}{(T_3 p + 1)} W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p), \quad (1.219)$$

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^3}(p) = \frac{b_7 W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^2}(p) + b_8}{(T_3 p + 1)}. \quad (1.220)$$

Подставляем  $\bar{\theta}^2$  из (1.213) в (1.210)

$$\bar{\theta}^0 = W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) \bar{\theta}^{0, \text{inp}} + W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) \bar{\theta}^{2, \text{inp}} + W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) \bar{\theta}^{os}, \quad (1.221)$$

где

$$W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) = f(p) W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p) (1 - e^{r_1(p)x}) + e^{r_1(p)x}, \quad (1.222)$$

$$W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) = f(p) W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^2}(p) (1 - e^{r_1(p)x}), \quad (1.223)$$

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^0(x)}(p, x) = f(p) W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^2}(p) (1 - e^{r_1(p)x}). \quad (1.224)$$

Остается лишь подставить  $\bar{\theta}^2$  из (1.213) в формулу (1.211)

$$\bar{\theta}^1 = W_{\theta^0, \text{inp} \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) \bar{\theta}^{0, \text{inp}} + W_{\theta^2, \text{inp} \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) \bar{\theta}^{2, \text{inp}} + W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) \bar{\theta}^{os}, \quad (1.225)$$

где

$$W_{\theta^0, imp \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) = \frac{b_1}{T_1 p + 1} + \frac{[b_1 f(p) + b_2 - b_1 f(p) e^{r_1(p)x}] W_{\theta^0, imp \rightarrow \theta^2}(p)}{T_1 p + 1}, \quad (1.226)$$

$$W_{\theta^2, imp \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) = \frac{[b_1 f(p) + b_2 - b_1 f(p) e^{r_1(p)x}] W_{\theta^2, imp \rightarrow \theta^2}(p)}{T_1 p + 1}, \quad (1.227)$$

$$W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^1(x)}(p, x) = \frac{[b_1 f(p) + b_2 - b_1 f(p) e^{r_1(p)x}] W_{\theta^{os} \rightarrow \theta^2}(p)}{T_1 p + 1}. \quad (1.228)$$

Полученные передаточные функции очень громоздки и ими неудобно пользоваться, поэтому мы и не рекомендуем их для практических расчетов.

## 2. Моделирование динамики механических систем

Исследование поведения динамических систем математики сводят к составлению и решению дифференциальных уравнений в частных производных. Это направление рассматривается в математической физике.

Уравнения параболического типа, к которым сводятся проблемы тепло- и массопередачи, рассматривались нами в первом разделе данного пособия.

Значительный интерес для специалистов по автоматизации производственных процессов представляют уравнения гиперболического типа, которыми описываются, в первую очередь, разнообразные механические процессы, начиная с классической задачи о колебаниях струны (волновое уравнение) и заканчивая множеством задач на колебания различных механических систем (тросов, мембран, балок и т.д.). Не имея возможности рассматривать в этом небольшом пособии множество удивительно интересных (как с физической, математической так и чисто эстетической точек зрения) задач, авторы ограничиваются рядом задач, с которыми им пришлось иметь дело в своей практической деятельности.

В этом разделе в отличие от предшествующего основной упор сделан на формирование и использование компьютерных алгоритмов численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных при различных вариантах начальных и граничных условий. Авторы считают, что численные методы в настоящее время (при условии реализации их на современных компьютерах) позволяют быстро, надежно и наглядно решить практически любую задачу, связанную с движением изучаемого класса объектов – рассчитать и построить график колебаний выбранной точки (элемента) системы, определить форму струны (нити, каната) в любой момент движения, не говоря уже об определении собственных частот, амплитуд колебаний и т.д..

## 2.1. Динамика малых поперечных колебаний нагруженной нити

Рассмотрим однородную гибкую (лишенную упругости) нить, масса одного метра которой равняется  $m_n$ , закрепленную на ее верхнем конце, которая свисает под собственным весом и под весом груза массой  $m_1$  на ее нижнем конце. На нить также действует поперечная сила  $f(x, f)$  (в расчете на 1 метр ее длины). Длина нити  $l$  (считается постоянной). Поместим начало системы координат в верхнюю точку нити (по крайней мере, это одно из ее положений), ось  $x$  вертикальная, ось  $y$  перпендикулярна оси  $x$ . Считаем, что исследуемые колебания происходят именно в плоскости  $xOy$ . Выделим на расстоянии  $x$  от верхнего конца нити участок длиной  $dx$  и рассмотрим сумму проекций на ось  $y$  сил, которые действуют на этот участок рис.2.1 – 2.3.

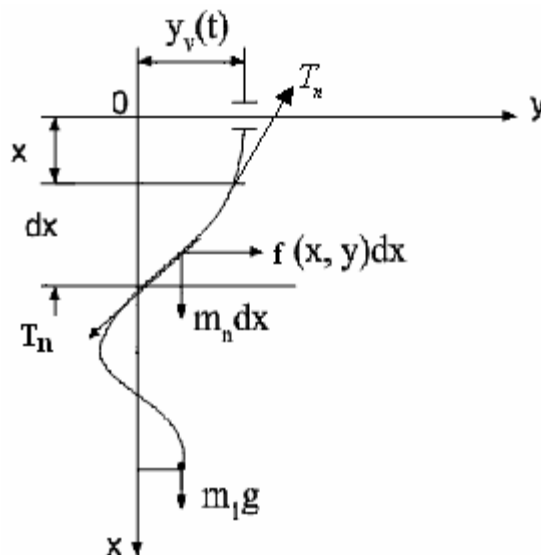


Рис.2.1. Расчетная схема малых поперечных колебаний нагруженной нити (цепи)

С учетом силы инерции это будет

$$-T_n \frac{\partial y}{\partial x} + \left[ \frac{T_n \partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_n \partial y}{\partial x} \right) dx \right] + f(x, t) dx = m_n dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где  $T_n = [m_n(l - x) + m_1]g$  - сила натяжения нити в  $x$ -вом разрезе,  $T_n \frac{\partial y}{\partial x}$  - проекция силы  $T_n$  на ось  $y$ .

После раскрытия скобок и сокращения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{g}{m_n} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [m_1 + m_n(l-x)] \frac{\partial y}{\partial x} \right\} + \frac{1}{m_n} f(x,t)$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \left\{ -\frac{\partial y}{\partial x} + \left[ \frac{m_1}{m_n} + l - x \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \frac{1}{m_n} f(x,t). \quad (2.1)$$

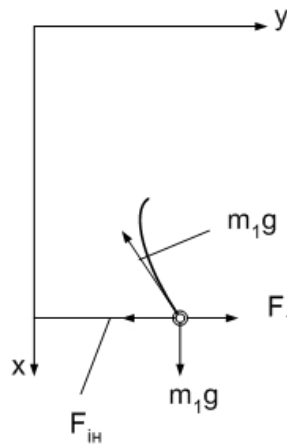


Рис.2.2. Схема сил, которые действуют на груз  $m_1$ .

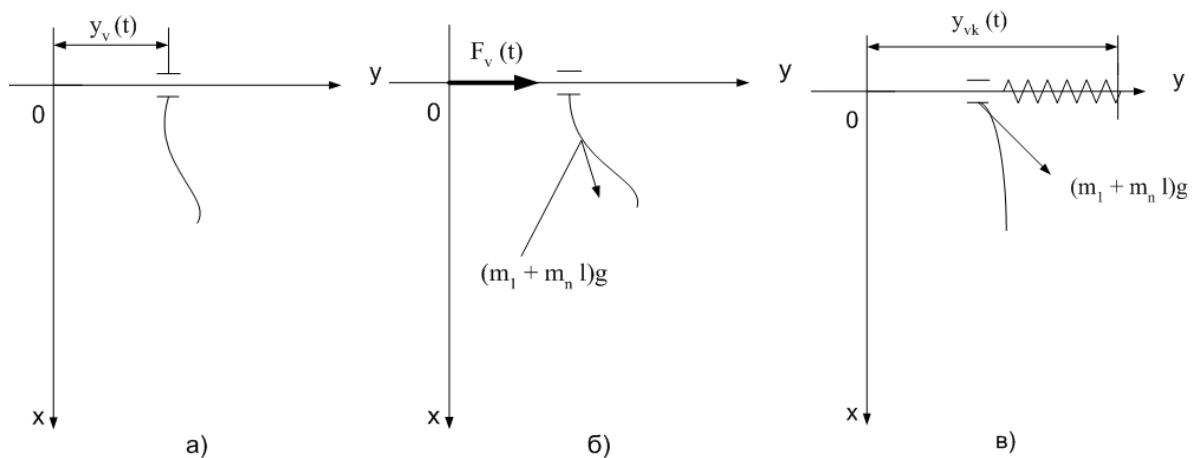


Рис.2.3. Схемы граничных условий для верхнего конца нити: а) I-го рода, б) II-го рода, в) III-го рода

Для груза  $m_1$  на нижнем конце нити (см. рис.2.2)

$$-m_1 g \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} + f_1(t) = m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=l}$$

или



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -g \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} + \frac{1}{m_1} f(t). \quad (2.2)$$

Здесь  $f_1(t)$  - сила, приложенная к грузу (параллельная оси  $y$ ).

Уравнение (2.2) можно рассматривать как граничное условие на нижнем конце нити. Граничное условие на верхнем конце нити может быть задано аналогично тому, как мы это делали для струны [40].

$Ngv=1$  - граничное условие 1 рода, рис.2.3, а)

$$y \Big|_{x=0} = y_g(t), \quad (2.3)$$

$Ngv=2$  - граничное условие 2 рода, рис.2.3, б)

$$-(m_1 + lm_n)g \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_v(t), \quad (2.4)$$

где  $f_v(t)$  - внешняя сила, которая действует вдоль оси  $y$  на верхний конец нити.

$Ngv=3$  - граничное условие 3 рода, рис.2.3, в)

$$-(m_1 + lm_n)g \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = C_v [y_{vk}(t) - y \Big|_{x=0}]. \quad (2.5)$$

Здесь  $C_v$  - жесткость пружины,  $y_{vk}(t)$  - перемещение конца пружины. Если перейти к дискретным переменным  $x=sh$ ,  $t = v\tau$ , то

$$y \Big|_{\substack{x=sh \\ t=v\tau}} = y_{s,v}. \quad (2.6)$$

Перейдем к дискретным переменным в (2.1).

$$\begin{aligned} & \frac{y_{s,v+1} - 2y_{s,v} + y_{s,v-1}}{\tau^2} = \\ & = g \left\{ \frac{y_{s-1,v} - y_{s+1,v}}{2h} + \frac{\left( \frac{m_1}{m_n} + l - sh \right) (y_{s-1,v} - 2y_{s,v} + y_{s+1,v})}{h^2} \right\} + \frac{f(sh, v\tau)}{m_n}. \end{aligned}$$

Решаем это уравнение относительно  $y_{s,v+1}$

$$y_{s,v+1} = 2y_{s,v} - y_{s,v-1} + e \left[ \frac{h(y_{s-1,v} - y_{s+1,v})}{2} + (m_l - sh)(y_{s-1,v} - 2y_{s,v} + y_{s+1,v}) \right] + k_f f(sh, v\tau),$$

$$1 \leq s \leq m-1, \quad (2.7)$$

где  $h = \frac{l}{m}$ ;  $q = \tau \sqrt{\frac{g}{h}}$ ;  $e = q^2$ ;  $t_2 = t^2$ ;  $k_f = \frac{t_2}{m_n}$ ;  $m_l = l + \frac{m_1}{m_n}$ .

Формула (2.7) реализует так называемую явную схему численного интегрирования дифференциального уравнения (2.1). Договоримся значения  $y_{s,v}$  для  $t = (v-1)\tau$  заносить в массив  $Yt$ : Coefr, тогда как для  $t = (v-1)\tau$  - в массив  $Yp$ : Coefr.

Кроме того примем, что время наблюдения процесса  $D$  сек, ширина графика  $L$  пикселей, тогда шаг по времени между соседними ординатами в массивах  $Yt$  и  $Yp$  будет  $Dt = \frac{D}{L}$ , а шаг интегрирования по времени  $\tau = \frac{Dt}{ks}$ , где  $ks$  - целое положительное число. Договоримся, что функции от времени в формулах (2.1) - (2.5) оформлены в виде одноименных подпрограмм

```
function F (x, t: real): real;
function Fi (t: real): real;
function Yv(t: real): real;
function Fv (t: real): real;
function Ykv (t: real): real.
```

Кроме того будем считать, что начальное состояние нити задается подпрограммами

```
function Yn (x: real): real;
function Dn(x: real): real.
```

Здесь  $Yn$  задает начальную форму нити при  $t=0$ , а  $Dn$  - скорость точек

нити в начальный момент времени. Начальное заполнение массива  $Y_p$  для  $t=0$ , таким образом, будет определяться функцией  $Y_n$ , а начальное заполнение массива  $Y_t$  для  $t=\tau$  реализуем воспользовавшись начальным отрезком ряда Маклорена

$$y_{s,1} = y_{s,0} + \tau \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_{t=0}. \quad (2.8)$$

Значения  $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0}$  задается подпрограммой  $D_n$ , а вот  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_{t=0}$  определим из (2.1),

рассматривая его при  $t=0$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_{t=0} = g \left\{ - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{t=0} + (m_l - x) \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{t=0} \right\} + \frac{f(x,0)}{m_n}. \quad (2.9)$$

Окончательно уравнение (2.8) в дискретный форме приобретает вид

$$y_{s,1} = y_{s,0} + \tau D_n(sh) + b_0 \left[ \frac{y_{s-1,0} - y_{s+1,0}}{2h} + b_1 (y_{s-1,0} - 2y_{s,0} + y_{s+1,0}) \right] + b_2 f(sh,0), \quad (2.10)$$

где 
$$b_0 = \frac{g\tau^2}{2}; \quad b_1 = \frac{(m_1 - sh)}{h^2}; \quad b_2 = \frac{\tau^2}{2m_n}.$$

Запишем теперь в дискретной форме граничные условия. Начнем с уравнения (2.2)

$$\frac{y_{m,v+1} - 2y_{m,v} + y_{m,v-1}}{\tau^2} = g \frac{y_{m-1,v} - y_{m,v}}{h} + \frac{f(v\tau)}{m_1}$$

откуда

$$y_{m,v+1} = 2y_{m,v} - y_{m,v-1} + b_3 (y_{m-1,v} - y_{m,v}) + b_n f((v+1)\tau), \quad (2.11)$$

где 
$$b_3 = \frac{g\tau^2}{h}; \quad b_n = \frac{\tau^2}{m_1}.$$

Граничное условие (2.3) дает

$$y_{0,v+1} = y_v((v+1)\tau). \quad (2.12)$$

Граничное условие (2.4) соответственно

$$-(m_1 + lm_n)g \frac{(y_{1,v+1} - y_{0,v+1})}{h} = f_v((v+1)\tau), \quad (2.13)$$

где 
$$b_5 = \frac{h}{(m_1 + lm_n)g}.$$

И в конце концов, граничное условие (2.4)

$$-(m_1 + lm_n)g \frac{(y_{1,v+1} - y_{0,v+1})}{h} = C_v [y_{vk}((v+1)\tau) - y_{0,v+1}]$$

откуда

$$y_{0,v+1} = b_6 y_{1,v+1} + b_7 y_{vk}((v+1)\tau), \quad (2.14)$$

где 
$$b_6 = \frac{1}{(1 + C_v b_5)}; \quad b_7 = 1 - b_6.$$

Шаг по времени в явной схеме оформим в виде подпрограммы StepT.

```

procedure StepT;
  var S:integer; Y:Coefr;
begin
  for S:=1 to m-1 do
    Y[S]:=2*Yt[S]-Yp[S]+e*((Yt[S-1]-Yt[S+1])*Hx/2+
      (M1-S*Hx)*(Yt[S-1]-
        2*Yt[S]+Yt[S+1]))+kf*F(S*Hx,t);
    t:=t+Tau;
    case Ngv of
      1: Y[0]:=Yv(t);
      2: Y[0]:=Y[1]+B5*Fv(t);
      3: Y[0]:=B6*Y[1]+B7*Ykv(t)
    end;
    Y[m]:=2*Yt[m]-Yp[m]+B3*(Yt[m-1]-Yt[m])+B4*F1(t-Tau);
    Y[-1]:=m; Yp:=Yt; Yt:=Y
  end;
end;

```

Явная схема численного интегрирования (2.7) дифференциального уравнения (2.1), как известно, устойчива при условии [9, 31, 113]

$$q < 1. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь неявную схему, которая будет устойчивой при любом  $q$ .

$$\begin{aligned} & \frac{y_{s,v+1} - 2y_{s,v} + y_{s,v-1}}{\tau^2} = \\ & = g \left\{ \frac{y_{s-1,v+1} - y_{s+1,v+1}}{2h} + \left( \frac{m_l}{m_n} + l - sh \right) \frac{y_{s-1,v+1} - 2y_{s,v+1} + y_{s+1,v+1}}{h^2} \right\} + \frac{f}{m_n} (sh \cdot (v+1)\tau). \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые (после умножения на  $\tau^2$ )

$$\begin{aligned} & y_{s,v+1} - 2y_{s,v} + y_{s,v-1} = \\ & = e \left\{ \frac{(y_{s-1,v+1} - y_{s+1,v+1})h}{2} + (m_l - sh)(y_{s-1,v+1} - 2y_{s,v+1} + y_{s+1,v+1}) \right\} + k_f f(sh, (v+1)\tau) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & ey_{s-1,v+1} \left( m_l + \frac{h}{2} - sh \right) - [2(m_l - sh)e + 1]y_{s,v+1} + e \left( m_l - \frac{h}{2} - sh \right) y_{s+1,v+1} = \\ & = -2y_{s,v} + y_{s,v-1} - k_f f(sh, (v+1)\tau). \end{aligned}$$

Делим на  $e$  и обозначаем

$$f_s = \frac{y_{s,v-1} - 2y_{s,v} - k_f f(sh, (v+1)\tau)}{e}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \left( m_l + \frac{h}{2} - sh \right) y_{s-1,v+1} - \left[ 2(m_l - sh)e + \frac{1}{e} \right] y_{s,v+1} + \left( m_l - \frac{h}{2} - sh \right) y_{s+1,v+1} = f_s, \\ & 1 \leq s \leq m-1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Систему (2.16) решаем методом прогонки. В процессе выполнения прямого хода уравнения системы приводится к виду

$$y_{s,v+1} = A_s y_{s+1,v+1} + B_s, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (2.17)$$

Подставляем (2.17) в (2.16) вместо  $y_{s-1,v+1}$

$$\left( m_l + \frac{h}{2} - sh \right) (A_{s-1} y_{s,v+1} + B_{s-1}) - \left[ 2(m_l - sh) + \frac{1}{e} \right] y_{s,v+1} + \left( m_l - \frac{h}{2} - sh \right) y_{s+1,v+1} = f_s$$

Полученное уравнение решаем относительно  $y_{s,v+1}$

$$y_{s,v+1} = -\frac{\left(m_l - \frac{h}{2} - sh\right)}{\left(m_l + \frac{h}{2} - sh\right)A_{s-1} - \left[2(m_l - sh) + \frac{1}{e}\right]} y_{s+1,v+1} + \frac{f_s - \left(m_l + \frac{h}{2} - sh\right)B_{s-1}}{\left(m_l + \frac{h}{2} - sh\right)A_{s-1} - \left[2(m_l - sh) + \frac{1}{e}\right]}.$$

Сравнивая последнее выражение с (2.17) получаем

$$\begin{cases} A_s = -\left(m_l - \frac{h}{2} - sh\right)/Z_n, \\ B_s = \left[f_s - \left(m_l + \frac{h}{2} - sh\right)B_{s-1}\right]/Z_n, \end{cases} \quad (2.18)$$

где 
$$Z_n = \left(m_l + \frac{h}{2} - sh\right)A_{s-1} - \left[2(m_l - sh) + \frac{1}{e}\right]$$

Формулы (2.18) можно рассматривать как рекуррентные. Но для того, чтобы они «заработали», необходимо определить  $A_0$ ,  $B_0$  независимо от (2.18). Воспользуемся для этого граничными условиями на верхнем конце нити.

$Ngv = 1$ . Сопоставим (2.18) с (2.12). Получим

$$\begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = y_v((v+1)\tau). \end{cases} \quad (2.19)$$

$Ngv = 2$ . Сравним (2.18) при  $s=0$  с (2.13)

$$\begin{cases} A_0 = 1, \\ B_0 = b_5 f_v((v+1)\tau). \end{cases} \quad (2.20)$$

$Ngv = 3$ . Сравнение (2.18) при  $s = 0$  с (2.14) дает

$$\begin{cases} A_0 = b_6, \\ B_0 = b_7 y_{kv}((v+1)\tau). \end{cases} \quad (2.21)$$

Получив  $A_0$ ,  $B_0$  (по формулам (2.19), (2.20) или (2.21) в зависимости от  $Ngv$ ), прямой ход в методе прогонки реализуется последовательно от  $s=1$  к  $s=m-1$  применением формул (2.19).

Для начала обратного хода необходимо определить  $y_{m,v+1}$ . Воспользуемся для этого формулой (2.11).

После этого обратный ход реализуется по формуле (2.17), в которой  $s$  изменяется последовательно от  $s=m-1$  до 0 включительно.

Описанный алгоритм реализации неявной схемы оформляем в виде подпрограммы StepN

```

procedure StepN;
  var S:integer; Zn,fn:real;
begin
  t:=t+Tau;
  case Ngv of
    1: begin A[0]:=0; B[0]:=Yv(t) end;
    2: begin A[0]:=1; B[0]:=B5*Fv(t) end;
    3: begin A[0]:=B6; B[0]:=B7*Ykv(t) end
  end;
  for S:=1 to m-1 do
    begin
      Zn:=A[S-1]*(M1+Hx/2-S*Hx)-2*(M1-S*Hx)-1/e;
      A[S]:=(-M1+Hx/2+S*Hx)/Zn;
      Fn:=(Yp[S]-2*Yt[S]-kf*F(S*Hx,t))/e;
      B[S]:=(Fn-B[S-1]*(M1+Hx/2-S*Hx))/Zn
    end;
  Yp:=Yt; Yt[-1]:=m;
  Yt[m]:=2*Yt[m]-Yp[m]+B3*(Yt[m-1]-Yt[m])+B4*F1(t-Tau);
  for S:=m-1 downto 0 do
    Yt[S]:=A[S]*Yt[S+1]+B[S]
  end;
end;

```

Комбинируемую схему предлагаем реализовать читателю самостоятельно.

Описанные алгоритмы численного интегрирования дифференциального уравнения (2.1) приведем в программе Nit, в которой предусмотрено несколько вариантов возмущения, которое вызывает движение нити с грузом.

$Nvr=1$ . Груз при  $t=0$  отклонен от положения равновесия на величину  $y_m$  верхняя точка в начале координат, форма нити - прямая, начальные скорости всех точек нитей - нулевые, внешние силы отсутствуют. Верхняя точка

фиксирована в начале координат.

$Nvr=2$ . При  $t = 0$  нить и груз находилось в положении равновесия, но по грузу нанесен мгновенный удар, в результате чего его скорость приобрела значение  $D_m$ . Внешние силы отсутствуют. Верхняя точка -фиксированная.

$Nvr=3$ . Верхняя точка перемещается так

$$\begin{cases} A_m \sin(W_m t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_m}, \\ y_v(t) = 0 & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega_m}. \end{cases}$$

Начальное положение - вертикальное, начальные скорости -нулевые, внешние силы отсутствуют.

$Nvr=4$ . Все то, что в  $Nvr=3$ , но  $y_v(t) = A_m \sin(W_m t)$  при  $t > 0$ .

В подпрограммах `Step1` и `Stepn` используются глобальные массивы  $Yt$ ,  $Yp$ : `Coefr`, которые представляют соответственно дискретные варианты формы нити в моменты времени  $t=v\tau$  и  $t=(v-1)\tau$ . Начальное заполнение этих массивов с использованием подпрограмм `Yn` и `Dn` и формулы (2.10) (для массива  $Yt$  при  $t=\tau$ ), а также вычисление значений всех коэффициентов, которые используются в (2.10) и процедурах `Step1`, `Stepn` реализуется в процедуре `Init`.

```

procedure Init;
  var s:integer;
      e9,Zn:real; A,B:Coefr;
begin
  C0:=sqrt(e1/Ro);
  Hx:=Lng/m; Dt:=D/L; ks:=1;
  mr:=round(Xd/hx);
  repeat
    Tau:=Dt/ks; q:=C0*Tau/Hx;
    if q>0.1 then inc(ks)
  until q<=0.1;
  e:=sqr(q);
  e4:=Cm*Tau/2; e7:=e/2;
  B1:=1/(1+Hx*k*CL); B2:=1-B1;
  B3:=1/(1+Hx*k*Cr); B4:=1-B3;

```



```

t:=Tau; Ld:=round(mr*L/m);
for s:=0 to mr do Up[s]:=Un(s*Hx);
for s:=1 to mr-1 do
    U[s]:=(Up[s]*(1-e4)+Tau*Dun(s*Hx)+
        e7*(Up[s-1]-2*Up[s]+Up[s+1]))/(1+2*e4);
case NgL of
    1: U[0]:=UL(t);
    2: U[0]:=U[1]+k*Hx*FL(t);
    3: U[0]:=b1*U[1]+b2*ULk(t)
end;
case Ngr of
    1: U[mr]:=Ur(t);
    2: U[mr]:=U[mr-1]-k*Hx*Fr(t);
    3: U[mr]:=b3*U[mr-1]+b4*Urk(t)
end;
Up[-1]:=mr; U[-1]:=mr
end;

```

Шаг по времени с использованием явной (Nmet=1) или неявной (Nmet=2) схем выполняется процедурой Step.

```

Procedure Step;
begin
    case Nmet of
        1: StepT;
        2: StepN
    end
end;

```

Массив My:CoefL ординат точки нити на расстоянии Xout от точки подвеса в функции от времени t формирует процедура FormMy.

```

procedure FormMy;
var s,z:integer;
begin
    Init; My[-1]:=L; My[0]:=Yp[Nout];
    Xu:=(GetMaxX-L) div 2;
    PutA; Rectangle(Xu,0,Xu+L,5);
    for z:=1 to L do
        begin
            for s:=1 to ks do Step;

```

```

        My[z] := Yp[Nout]
    end
end;

```

Формирования графика колебаний точки нити при  $x=Xout$  берет на себя процедура OscPoint.

```

procedure OscPoint;
var S:integer; Y:real;
begin
    c:=15;
    repeat
        PutA;
        Ou('0-exit, 1-Nvr, 2-NMet, 3-Ngv, 4-m, 5-D, 6-Xout,
            7-k, 8-Sc, 9-Gr');
        Str(Nvr,T10);          TS:='Nvr='+T10;
        Str(NMet,T10);        TS:=TS+', NMet='+T10;
        Str(Ngv,T10);         TS:=TS+', Ngv='+T10;
        Str(m,T10);           TS:=TS+', m='+T10;
        Str(D:1:2,T10);       TS:=TS+', D='+T10;
        Str(Xout:1:2,T10);    TS:=TS+', Xout='+T10;
        Str(k:1:3,T10);       TS:=TS+', k='+T10;
        Info; J1:=ReadKey;
        case J1 of
            '1':Oui('Nvr',Nvr);
            '2':Oui('NMet',NMet);
            '3':Oui('Ngv',Ngv);
            '4':Oui('m',m);
            '5':Our('D',D);
            '6':Our('Xout',Xout);
            '7':Our('k',k);
            '8':begin
                FormMy; Ymin:=0; Ymax:=0;
                for S:=0 to L do
                    begin
                        Y:=My[S];
                        if Y<Ymin then Ymin:=Y;
                        if Y>Ymax then Ymax:=Y
                    end;
                Xmin:=0; Xmax:=D; X0Y0(false);
                ClearDevice; SystCoor; Graphic(My,C)
            end;
            '9':begin

```

```

        FormMy; Graphic(My,C)
    end
end
until J1='0';
end;

```

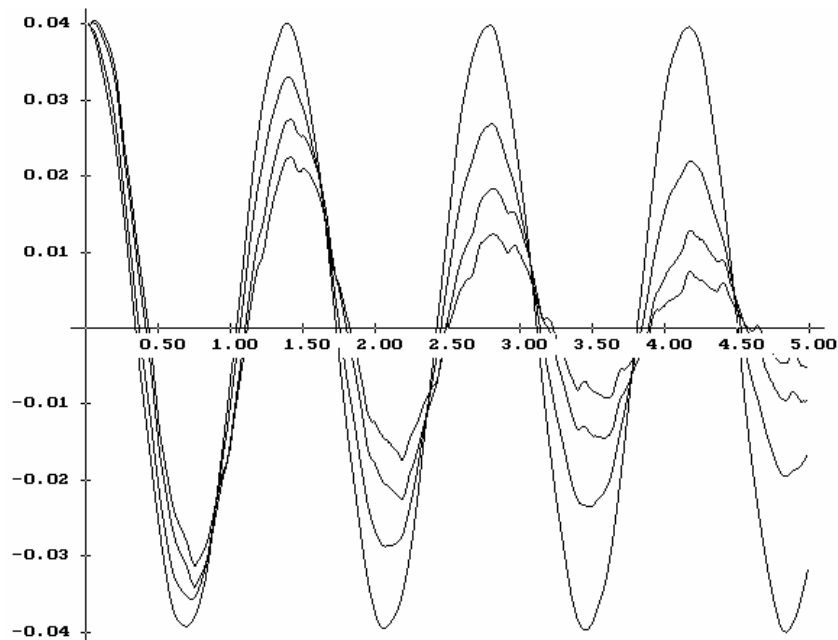


Рис. 2.4. Колебания точки нити в функции времени

Форму нити из массива  $Y$ :  $Coefr$  ее ординат формирует процедура  $FormNit$ . Форма нити изображается в системе координат, где ось  $x$  направлена вертикально вниз, а ось  $y$  - горизонтально (положительное направление - вправо). При этом массив  $Y:Coefr$  пересчитывается с использованием  $B$ -сплайновой интерполяции в ординаты соответствующего графика.

```

procedure FormNit(y:Coefr; c:integer;)
    var S,Z,Se,Ze,m:integer;
        Y:real;
begin
    m:=round(Y[-1]);Bspline(Y,2,2,0,0,B);
    if c<0 then SetwriteMode(1)
        else SetColor(C);
    MoveTo(X0+round(Y[0]/Dx),Yu);
    for Z:=1 to H do
        begin

```

```

    Se:=X0+round(Bsplint(B,s*m/H)/Dx);
    Ze:=Y0+Z;
    LineTo(Se,Ze);
    If c<0 then
        PutPixel(Se,Ze,GetMaxColor-GetPixel(Se,Ze))
    end;
    Rectangle(Se-1,Ze-1,Se+1,Ze+1);
    if C<0 then SetWriteMode(0)
        else SetColor(15)
end;

```

В этой процедуре предусмотрено, в частности, использование инверсного цвета (при  $c < 0$ ). Эта особенность используется при демонстрации динамики изменения формы нити с течением времени -процедура `MotorNit`.

Эта процедура формирует график формы струны в текущий момент времени. Этот график сохраняется на экране на протяжении времени, пока компьютер не сделает  $Nc$  шагов интегрирования по времени, после чего старый график удаляется с экрана (путем его повторного рисования в инверсном цвете), на его месте формируется обновленный график и так до тех пор, пока не будет нажата клавиша '0'.

```

procedure MotorNit;
var s:integer;
    Ypp:Coefr;
begin
    Init; Xmin:=-Ymax; Xmax:=Ymax;
    Ymin:=-H; Ymax:=0;
    X0Y0(false); ClearDevice; SystCoor;
    FormNit(Yp,-1); PutA; Ou('0-exit');
    J2:='1';
    repeat
        Ypp:=Yp;
        for s:=1 to Nc do Step;
        FormNit(Ypp,-1); FormNit(Yp,-1);
        if KeyPressed then J2:=ReadKey
    until J2='0'
end;

```

Формирование соответствующей системы координат, выбор  $Nvr$ ,  $m$ ,  $D$ ,

и  $Y_{\max}$  и демонстрацию колебаний нити организует процедура `Dynam`.

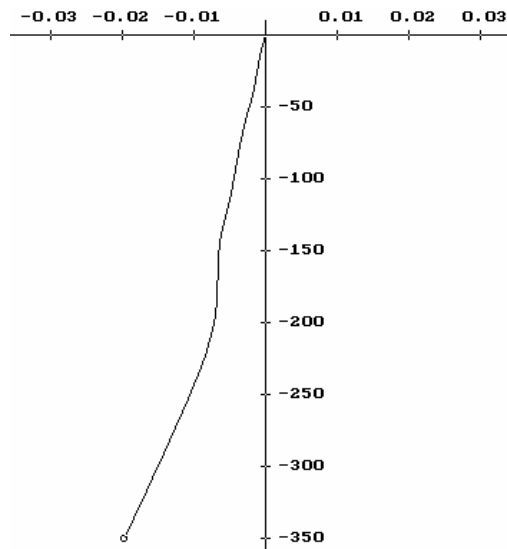


Рис. 2.5. Форма нити.

Спектральный анализ колебаний нити (точнее, точки на расстоянии  $X_{out}$  от верхнего конца) реализует процедура `FormSpect`. Алгоритм, положенный в основу этой процедуры, детально рассматривался в параграфе посвященном исследованию колебаний струны, поэтому здесь его не комментируем.

```

procedure FormSpect;
  const kw=1.5;
  var Zrez,S,Z,Zn,Zk:integer;
      y,wt,Wrez,Dw,W:real;
      T20:String[20];
      A,B:Coefl;
begin
  Dw:=Wmax/L; Init; Xn:=(GetMaxX-L) div 2;
  PutA; Rectangle(Xu,0,Xu+L,5); My[-1]:=L;
  My[0]:=Yp[Nout]; Ymin:=0; Ymax:=0;
  for Z:=1 to L do
    begin
      Line(Xu+Z,1,Xu+Z,5); A[Z]:=0; B[Z]:=0;
      for S:=1 to ks do Step;
      Y:=Yp[Nout]; My[Z]:=Y;
      if Y<Ymin then Ymin:=Y;
      if Y>Ymax then Ymax:=Y
    end;
  Xmin:=0; Xmax:=D; X0Y0(false);
  ClearDevice; SystCoor; Graphic(My,C);
  PutA; Rectangle(Xu,0,Xu+L,5);

```

```

for Z:=0 to L do
  begin
    W:=Z*Dw; Line(Xu+Z,1,Xu+Z,4);
    for S:=0 to L do
      begin
        wt:=W*S*Dw; y:=My[S];
        A[Z]:=A[Z]+y*cos(wt);
        B[Z]:=B[Z]-y*sin(wt)
      end
    end;
  Ymax:=0; PutA; Rectangle(Xu,0,Xu+L,5);
  for Z:=0 to L do
    begin
      y:=sqrt(sqr(A[Z])+sqr(B[Z]));
      My[Z]:=y;
      if Y<Ymax then Ymax:=Y;
      Line(Xu+Z,1,Xu+Z,4)
    end;
  Xmin:=0; Xmax:=Wmax; Ymin:=0;
  XOY0(false); ClearDevice; SystCoor;
  Graphic(My,C); J2:='6';
  Wn:=0; Wk:=Wmax; Wrez:=Wmax/2;
  repeat
    PutA; Ou('0-exit, 1-<, 2->, 3-clear, 4-Wn, 5-Wk');
    Str(Wn:1:4,T20); Ts:='Wn='+T20;
    Str(Wk:1:4,T20); Ts:=Ts+', Wk='+T20;
    Str(Wrez:1:4,T20); Ts:=Ts+', Wrez='+T20;
    if KeyPressed then
      begin
        J2:=ReadKey;
        case J2 of
          '1': Ymax:=Ymax*kw;
          '2': Ymax:=Ymax/kw;
          '4': Our('Wn',Wn);
          '5': Our('Wk',Wk)
        end;
        if J2 in ['1'..'3'] then
          begin
            XOY0(false); ClearDevice;
            SystCoor; Graphic(My,C)
          end
        end;
        for S:=1 to ks do Step;
        Zn:=round(Wn/Dw); Zk:=round(Wk/Dw);
        Zrez:=Zn; Dw:=Wmax/L; Y:=Yp[Nout];

```

```

PutA; Rectangle(Xu,0,Xu+L,5);
for Z:=0 to L do
begin
wt:=Z*Dw*t; Line(Xu+Z,1,Xu+Z,4);
A[Z]:=A[Z]+y*cos(wt);
B[Z]:=B[Z]-y*sin(wt);
y:=sqrt(sqr(A[Z])+sqr(B[Z]));
My[Z]:=y;
if(Z<Zn) and (Z<=Zk) then
if Y>My[Zrez] then Zrez:=Z
end;
Graphic(My,C); Wrez:=Zrez*Dw
until J2='0'
end;

```

Организационную сторону при демонстрации текущего спектра колебаний нагруженной нити берет на себя процедура Specter.

```

procedure Specter;
begin
repeat
PutA;
Ou('o-exit,1-Nvr,2-P1n,3-P1,4-m,5-D,6-Xout,
7-Wmax,8-C,9-Spect');
Str(Nvr,T10); Ts:= 'Nvr =' +t10;
Str(P1n:1:3,T10); Ts:=Ts+', P1n=' +t10;
Str(P1:1:3,T10); Ts:=Ts++=' ', P1=' +=T10;
Str(m,T10); Ts:=Ts+', m=' +t10;
Str(d:1:2,T10); Ts:=Ts+', D=' +t10;
Str(Xout:1:2,T10); Ts:=Ts+', Xout=' +t10;
Str(Wmax:1:2,T10); Ts:=Ts+', Wmax=' +t10;
Str(C,T10); Ts:=Ts+', C=' +t10;
Info; J1:=ReadKey;
case J1 of
'1': Oui('Nvr',Nvr);
'2': Our('P1n',P1n);
'3': Our('P1',P1);
'4': Oui('m',m);
'5': Our('D',D);
'6': Our('Xout',Xout);
'7': Our('Wmax',Wmax);
'8': Oui('C',C);

```

```
    '9': FormSpect
  end
until J1='0'
end;
```

Текущий спектр колебаний отдельной точки нити показан на рис. 2.6.

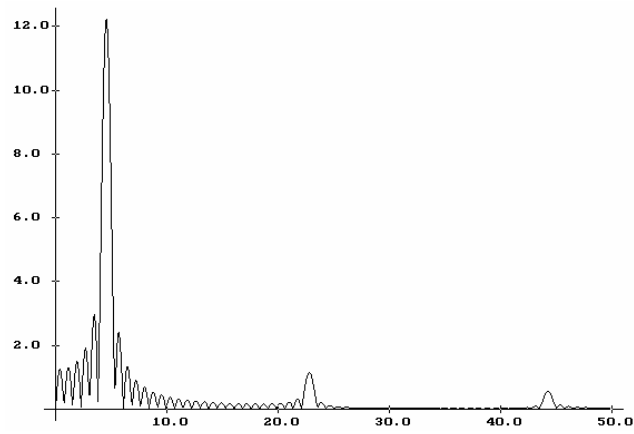


Рис. 2.6. Текущий спектр.



## 2.2. Динамика продольных колебаний вязко-упругого стержня

Дифференциальное уравнение в перемещениях  $u$  для  $x$ -вого сечения стержня при продольных (вдоль его оси  $x$ ) колебаниях в среде Максвелла будем рассматривать в виде [18, 47]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - C_m \frac{\partial U}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (2.22)$$

$c_0$  - скорость распространения волн сжатия-растяжения вдоль оси стержня,  $c_0 = \sqrt{E_1 / \rho}$ ;  $E_1$  - модуль упругости материала стержня,  $\rho$  - плотность его материала,  $C_m$  - коэффициент затухания,  $t$  - время,  $x$  - пространственная координата,  $l$  - длина стержня.

Подобным дифференциальным уравнением описывается, в частности, процесс распространения колебаний в набивных сваях при исследовании их на предмет выявления и локализации возможных дефектов. Для этого по верхнему концу сваи специальным молотком наносят удар и регистрируют колебания того же таки верхнего конца сваи. По графику колебаний оценивают наличие, местоположение и размер дефекта.

Рассмотрим алгоритм численного интегрирования дифференциального уравнения (2.22). Введем обозначение

$$h = \frac{l}{m}; \quad Dt = \frac{D}{L}; \quad \tau = \frac{Dt}{ks}; \quad U \Big|_{\substack{x=sh \\ t=v\tau}} = U_{s,v} \quad (2.23)$$

Здесь  $h$  - шаг интегрирования по  $x$ ,  $m$  - число отрезков, на которые разбивается стержень по длине в целях расчета,  $D$  - время наблюдения переходного процесса,  $L$  - целое положительное число ( $L \sim 500$ ),  $Dt$  - величина, пропорциональная шагу интегрирования по времени,  $\tau$  - шаг интегрирования по времени,  $ks$  - целое положительное число ( $ks \geq 1$ ).

После замены непрерывных производных разностными соотношениями дифференциальное уравнение (2.22) может быть представлено в таком виде

$$\frac{U_{s,v+1} - 2U_{s,v} + U_{s,v-1}}{\tau^2} = c_0^2 \frac{U_{s-1,v} - 2U_{s,v} + U_{s+1,v}}{h^2} - C_m \frac{U_{s,v+1} - U_{s,v-1}}{2\tau},$$

$$1 \leq s \leq m-1. \quad (2.24)$$

Умножим (2.24) на  $\tau^2$  и введем новые обозначения

$$q = \frac{c_0 \tau}{h}; \quad e = q^2; \quad e_4 = \frac{C_m \tau}{2}. \quad (2.25)$$

Тогда (2.25) приводится к виду

$$U_{s,v+1}(1 + e_4) = 2U_{s,v} + (e_4 - 1)U_{s,v-1} + e(U_{s-1,v} - 2U_{s,v} + U_{s+1,v}).$$

Решаем последнее уравнение относительно  $U_{s,v+1}$

$$U_{s,v+1} = \frac{2U_{s,v} + e_2 U_{s,v-1} + e(U_{s-1,v} - 2U_{s,v} + U_{s+1,v})}{e_3},$$

$$1 \leq s \leq m-1, \quad (2.26)$$

где  $e_2 = e_4 - 1$ ;  $e_3 = e_4 + 1$ .

Формула (2.26) задает явную схему численного интегрирования дифференциального уравнения (2.22). В (2.26) „обслуживаются" внутренние узлы сетки  $1 \leq s \leq m-1$ . Внешние узлы (с номерами  $s = 0$  и  $s = m$ ) должны обслуживаться соответствующими граничными условиями.

Рассмотрим по три возможных варианта граничных условий на каждом из концов стержня. Введем обозначение  $NgL$  - номер граничного условия на „левом" (при  $x = 0$ ) и  $Ngr$  - номер граничного условия на „правом" (при  $x = l$ ) концах.

Начнем с варианта

$$NgL = 1,$$

$$U|_{x=0} = U_l(t), \quad (2.27)$$

где  $U_l(t)$  - перемещение левого конца стержня в функции времени.

$$NgL = 2,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = kF_l(t), \quad (2.28)$$

где  $F_l(t)$  - сила, приложенная к левому концу стержня, вдоль его оси (за положительное направление силы принято направление возрастания  $x$ ).  $k = \frac{1}{E_1 f}$  - коэффициент пропорциональности,  $f$  - площадь поперечного сечения стержня.

$$Ngl = 3,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = kC_l(t)[U_{lk}(t) - U\Big|_{x=0}]. \quad (2.29)$$

Здесь  $U_{lk}(t)$  - перемещение левого конца пружины с коэффициентом жесткости  $C_l$ , если „правый” конец соединен с левым концом стержня.

Аналогично для правого конца стержня:

$$Ngr = 1,$$

$$U\Big|_{x=l} = U_r(t), \quad (2.30)$$

$$Ngr = 2,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = kF_r(t), \quad (2.30)$$

$$Ngr = 3,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = kC_r(t)[U\Big|_{x=l} - U_{rk}(t)]. \quad (2.31)$$

Здесь  $U_r(t)$  - перемещение правого конца стержня,  $F_r(t)$  - сила, приложенная к правому концу,  $U_{rk}(t)$  - перемещение свободного конца пружины жесткости  $C_r$ , тогда как другой ее конец присоединен к правому концу стержня.

Для сваи, находящейся в грунте, “правый” то есть нижний ее конец при своих колебаниях взаимодействует с грунтом, отдавая последнему часть своей энергии. Будем считать, что сопротивление движению нижнего конца сваи пропорционально его перемещению, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = -k_l U, \quad (2.32)$$

где  $k_l$  - коэффициент пропорциональности, который зависит от формы сваи, в частности, от площади ее поперечного сечения и, естественно, от свойств грунта.

Этот вариант граничного условия условно обозначим как  $Ngr = 4$ .  
Перейдем теперь в граничных условиях (2.27) - (2.32) к дискретным величинам

$$Ngl = 1,$$

$$U_{0,v+1} = U_l((v+1)\tau). \quad (2.33)$$

$$Ngl = 2,$$

$$-\frac{U_{1,v+1} - U_{0,v+1}}{h} = kF_l((v+1)\tau),$$

откуда

$$U_{0,v+1} = U_{1,v+1} + khF_l((v+1)\tau). \quad (2.34)$$

$$Ngl = 3,$$

$$-\frac{U_{1,v+1} - U_{0,v+1}}{h} = kG_l[((v+1)\tau) - U_{0,v+1}],$$

откуда

$$U_{0,v+1} = b_1 U_{1,v+1} + b_2 U_{lk}((v+1)\tau). \quad (2.35)$$

где  $b_1 = \frac{1}{1 + hkC_l}$ ;  $b_2 = 1 - b_1$ .

$$Ngr = 1,$$

$$U_{m,v+1} = U_r((v+1)\tau). \quad (2.36)$$

$$Ngr = 2,$$

$$-\frac{U_{m,v+1} - U_{m-1,v+1}}{h} = kF_r((v+1)\tau),$$

откуда

$$U_{m,v+1} = U_{m-1,v+1} - khF_r((v+1)\tau). \quad (2.37)$$

$$Ngr = 3,$$

$$-\frac{U_{m,v+1} - U_{m-1,v+1}}{h} = kC_r[U_{m,v+1} - U_{rk}((v+1)\tau)],$$

откуда

$$U_{m,v+1} = b_3 U_{m-1,v+1} + b_4 U_{rk}((v+1)\tau). \quad (2.38)$$

где 
$$b_3 = \frac{1}{1 + hkC_r}; \quad b_4 = 1 - b_3.$$

$Ngr = 4,$

$$\frac{U_{m,v+1} - U_{m-1,v+1}}{h} = -k_t U_{m,v+1},$$

откуда

$$U_{m,v+1} = b_5 U_{m-1,v+1}, \quad (2.40)$$

где 
$$b_5 = \frac{1}{1 + k_t h}.$$

Договоримся перемещение поперечных сечений (“точек”) стержня в процессе его колебаний задавать массивами  $U$ :  $Coefr$  (в момент времени  $t = v\tau$ ) и  $Up$ :  $Coefr$  (в момент времени  $t = (v-1)\tau$ ). Для начала численного интегрирования дифференциального уравнения (2.22) массив  $Up$  (для  $v=1$ ) заполним в соответствии с подпрограммой  $Un(x)$ , которая задает положения точек стержня в начале процесса (при  $t=0$ ). Кроме того, для  $t=0$  задается также скорость движения всех точек стержням-подпрограммой  $DUn(x)$ .

Чтобы сформировать массив  $U$  для  $v=1$  ( $t=\tau$ ) воспользуемся разложением перемещения  $U$  в ряд Маклорена, ограничиваясь в нем первыми тремя членами

$$U|_{t=\tau} \cong U|_{t=0} + \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \tau^2. \quad (2.41)$$

Значение  $U|_{t=0}$  возьмем из подпрограммы  $Un(x)$ . В дискретной форме его будет представлять массив  $Up$ ; значения  $\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0}$  задается

подпрограммой  $DUn(x)$ , а вот значение  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$  определим из (2.22),

рассматривая его при  $t=0$ . В результате формула (2.41) в дискретной форме приобретает вид

$$U_{s,1} = U_{s,0} + \tau \cdot DU_r(s \cdot h) + \frac{\tau^2}{2} \left[ C_0^2 \frac{U_{s-1,0} - 2U_{s,0} + U_{s+1,0}}{h^2} - \frac{C_m}{\tau} (U_{s,1} - U_{s,0}) \right],$$

$$1 \leq s \leq m-1 \quad (2.42)$$

Решаем (2.42) относительно  $U_{s,1}$  учитывая ранее введенные обозначения.

$$U_{s,1} = \frac{e_5 U_{s,0} + \tau DUn(sh) + e_7 (U_{s-1,0} + U_{s+1,0})}{e_6}, \quad 1 \leq s \leq m-1 \quad (2.43)$$

Здесь дополнительно обозначим  $e_5 = 1 - e$ ;  $e_6 = 1 + 2e_4$ ;  $e_7 = \frac{e}{2}$ .

Внешние узлы сетки то есть  $U_{0,1}$  и  $U_{m,1}$  для массива  $U$  обслуживаем с использованием граничных условий при  $U_{0,1}$  та  $U_{m,1}$ . Рассмотренная нами схема численного интегрирования дифференциального уравнения (2.22) является явной.

Само же уравнение (2.22) можно рассматривать как волновое, в котором член  $C_m \frac{\partial U}{\partial t}$  - представляет внешнюю тормозящую (демпфирующую) силу.

Для волнового же уравнения условием устойчивости явной схемы численного интегрирования является, как известно [9, 12, 81],

$$q < 1. \quad (2.44)$$

Для подстраховки, а также с целью повышения точности интегрирования шаг  $\tau$  по времени будем выбирать из условия  $q \leq 0.1$ . Это достигается подбором соответствующего значения  $ks$  (смотри формулы (2.23)).

Окончательно выбор шагов  $h$  и  $\tau$ , вычисление коэффициентов, которые обслуживают формулы (2.23), (2.25), (2.26), (2.35), (2.238), (2.239) и (2.42), начальное заполнение массивов  $U_r$  и  $U$ , установку начального значения времени  $t$  сосредоточим в подпрограмме `Init`.

```
procedure Init.
  var s: integer;
begin
```

```

c0:=sqrt(E1/Ro); Hx:=Lng/m;
Dt:=D/L; ks:=1;
repeat
  Tau:=Dt/ks; q:=c0*Tau/Hx;
  if q>0.1 then inc(ks)
until q>=0.1;
e:=sqr(q); e4:=Cm*Tau/2; e2:=e4-1;
e3:=e4+1; e5:=1-e; e6:=1+2*e4;
e1:=e/2;
B1:=1/(1+Hx*k*Cl); B2:=1-B1;
B3:=1/(1+Hx*k*Cr); B4:=1-B3;
B5:=1/(1+kt*Hx);
for s:=0 to m do Up[s]:=Un(s*Hx);
t:=Tau;
for s:=0 to m-1 do
u[s]:=(e5*Up[s]+tau*Dun(s*Hx)+e1*
  (up[s-1]+Up[s+1]))/e6;
case Ngl of
  1: U[0]:=UL(t);
  2: U[0]:=U[1]+k*Hx*FL(t);
  3: U[0]:=B1*U[1]+B2*ULk(t)
end;
case Ngr of
  1: U[m]:=Ur(t);
  2: U[m]:=U[m-1]-k*Hx*Fr(t);
  3: U[m]:=B5*U[m-1]
end;
Up[-1]:=m; U[-1]:=m
end;

```

Шаг по времени, по формуле (2.26) для внутренних узлов и по формулам (2.33) - (2.39) для внешних узлов стержня - процедура Step.

```

procedure Step;
  var s:integer; Ud:Coefr;
begin
  t:=t+Tau; Ud[-1]:=m;
  for s:=1 to m-1 do
  Ud[s]:=(2*U[s]+e2*Up[s]+e*(U[s-1]-
    2*U[s]+U[s+1]))/e3
  case NgL of
    1: Ud[0]:=UL(t);
    2: Ud[0]:=Ud[1]+k*Hx*FL(t);

```

```

3: Ud[0]:=b1*Ud[1]+b2*ULk(t)
end;
case Ngr of
1: Ud[m]:=Ur(t);
2: Ud[m]:=Ud[m-1]-k*Hx*Fr(t);
3: Ud[m]:=B3*Ud[m-1]+B4*Ur(t);
4: Ud[m]:=B5*Ud[m-1]
end;
Up:=U; U:=Ud
end;

```

До сих пор речь шла о сплошном однородном стержне длиной  $l$  и дифференциальном уравнении (2.22), в котором коэффициент  $St$  является величиной постоянной (константой).

Теперь вместо абстрактного стержня рассмотрим сваю, в которой на координате  $X_d$  может оказаться дефект, например, трещина, которая может служить преградой для распространения волн сжатия-растяжения в свае. Это может быть также обрыв сваи или сужение ее поперечного сечения с аналогичным эффектом на распространение колебаний.

Предположим, что дефект занимает площадь  $K_{fd}f$ , где  $f$  - площадь поперечного сечения целой (без дефекта) сваи,  $K_{fd}$  - коэффициент ( $0 \leq K_{fd} \leq 1$ ).

В первом приближении будем также считать, что в соответствии с принципом суперпозиции (а рассмотренная нами математическая модель сваи является линейной) сваю можно рассматривать как такую, что состоит из сваи длиной  $l$  и поперечным сечением с площадью  $(1 - K_{fd})f$ , и сваи длиной  $X_d$  с поперечным сечением  $K_{fd} * f$ .

Переходные процессы в этих двух сваях будем рассчитывать в отдельности. А их эффект на перемещение левого (верхнего) конца сваи будем формировать как сумму эффекта от колебаний сваи длиной  $l$  (с коэффициентом  $(1 - K_{fd})$ ) и колебаний сваи длиной  $X_d$  с коэффициентом  $K_{fd}$ . В расчетной схеме дефект на расстоянии  $X_d$  от верхнего конца сваи локализуется в ячейке с номером  $mr := \text{round}(X_d/H_x)$ .



Для сваи без дефекта,  $X_d$  следует считать равным длине сваи  $l$  ( $m_r = m$ ). Если свая сформирована в грунте, свойства которого изменяются в функции координаты  $x$ , то коэффициент  $C_m$  перестает быть константой, а становится функцией  $x$ . Характер этой функции задается в зависимости от геологических характеристик грунта, в котором размещена свая. Будем считать, что значение  $C_m$  задается с шагом в полметра и оно рассматривается как кусочно-постоянная величина.

$$C_m \Big|_{sh \leq x \leq (s+1)h} = C_m \Big|_{x=sh}.$$

$C_m$  как функцию от координат  $x$  будем задавать массивом  $C_m : \text{Coefr}$ . Поскольку мы договорились, что будем вводить значение коэффициента  $C_m$  с шагом в 0.5 м, то эти значения в процессе ввода будем временно располагать в массиве  $C_{mi} : \text{Coefr}$ . Размер последнего определяется параметром

$$S_{km} := 2 * N_m - 1, \text{ где } N_m := \text{round}(L_{ng}).$$

Пересчет промежуточного массива  $C_{mi}$  в рабочий  $C_m$  оформим в виде подпрограммы `FormCm`.

```

procedure FormCm;
  var z, s: integer;
  begin
    Cm[-1] := m;
    for z := 0 to m do
      begin
        s := trunc(z * 2 * Nm / m);
        if s > Skm then s := Skm;
        Cm[z] := Cmi[s]
      end
    end;
end;

```

Последовательное введение всех значений  $C_m$  с шагом в полметра с занесением их в массив  $C_{mi}$  и с последующим пересчетом его в массив  $C_m$  реализует подпрограмма `InpCm`.

```

procedure InpCm;

```

```

var s:integer;
begin
  for s:=0 to Skm do
    begin
      Str(s,T10); Our('Cmi['+T10+']',Cmi[s])
    end;
  FormCm
end;

```

Очевидно, что, как правило, изменения свойства грунта рассматриваются как ступенчатые, например слой глины сменяется слоем песка, который в свою очередь, сменяется водоносным слоем, и т.п. Толщина каждого из слоев может составлять несколько метров. В границах слоя коэффициент  $C_m$  будет оставаться неизменным. Чтобы упростить процесс введения значений  $C_m$  в массив  $Cmi$  следует предусмотреть возможность дублирования текущего значения  $C_m$  в ячейках массива  $Cmi$  с ячейками от  $S_n$  к  $S_k$ .

Значения  $C_m$  для слоев, толщина которых приблизительно равняется половине метра, удобно задавать для отдельной ( $S_n$ -ой) ячейки массива  $Cmi$ .

И, в конце концов, не исключен случай, когда грунт по всей длине сваи за исключением, возможно, ее нижнего конца, который упирается в твердую основу, характеризуется одним и тем же значением  $C_m$ .

Тогда целесообразно дублировать значение  $C_m$  в ячейках массива  $Cmi$  в диапазоне номеров от 0 к  $S_{km}$ . Все перечисленные выше варианты реализуются в подпрограмме  $OpCm$ .

```

procedure OpCm;
  var s,De,xs,ys,Sn,Sk:integer; y,re:real;
begin
  Sn:=0; Nm:=round(Lng);
  Cmi[-1]:=2*Nm; Skm:=2*Nm-1; Sk:=Skm;
  repeat
    PutA;
    Ou('0-exit, 1-Cm, 2-Sn, 3-Sk, 4-Cm[Sn..Sk],
      5-Cm[Sn], 6-Cm[0..Skm], 7-InpCm, 8-GrCm');
    Str(Cm,T10); Ts:='Cm='+T10;
    Str(Sn,T10); Ts:=Ts+', Sn='+T10;
  until De;
end;

```

```

Str(Sk,T10);           Ts:=Ts+', Sk='+T10;
Str(Skm,T10);         Ts:=Ts+', Skm='+T10;
Info; j2:=readkey;
case j2 of
  '1': Oui('Cm',Cmc);
  '2': Oui('Sn',Sn);
  '3': begin
        Str(Skm,T10);
        repeat
            oui('Sk(Sk<='+T10+']',Sk)
        until Sk<=Skm
    end;
  '4':for S:=Sn to Sk do Cmi[s]:=Cmc;
  '5':Cmi[Sn]:=Cmc;
  '6':for S:=0 to Skm do Cmi[s]:=Cmc;
  '7':InpCm;
  '8':begin
        Xmin:=0; Xmax:=L; Ymin:=0; Ymax:=0;
        for s:=0 to Skm do
            begin
                y:=Cmi[s];
                if y<Ymin then Ymin:=y;
                if y>Ymax then Ymax:=y
            end;
        XOY0(false); ClearDevice; SystCoor;
        SetColor(15); Re:=L/(2*Nm);
        for s:=0 to Skm do
            begin
                xs:= xu+round(s*Re);
                ys:=yu- round(Cmi[s]/Dy);
                if s>0 then
                    Line(xs,y0-round(Cmi[s-1]/Dy),xs,ys);
                    Line(xs,ys,
                        xu+round((s+1)*L/(2*Nm)),ys)
            end;
        for s:=0 to 2*Nm do
            begin
                xs:=xu+round(s*re);
                Str(s div 2,T10); De:=Length(T10);
                if not(odd(s)) then
                    OutTextXY(xs-4*De+1,y0+10,T10);
                Line(xs,y0-4,xs,y0+4);
                Str(s,T10); De:=Length(T10);
                if (not(odd(s))) and (s>0) then
                    OutTextXY(xs-4*De+1,y0-15,T10);
            end;
    end;
end;

```

```

        OutTextXY(xu+L+20,y0-15,'s');
        OutTextXY(xu+L+20,y0+10,'M')
        re:=500;
    for s:=1 to round(Ymax/re) do
    begin
        ys:=y0-round(s*re/Dy);
        Line(xu-4,ys,xu+4,ys);
        Str(round(re*s),T10); De:=Length(T10);
        OutTextXY(xu-8*De-8,ys-3,T10)
    end
    end
    until j2='0';
    FormCm
end;
```

В зависимости от наличия дефекта ( $Nd = 1$ ) или его отсутствия ( $Nd = 0$ ) расчетная длина  $m_r$  массивов  $U$  и  $U_p$  становится равной

```

case Nd of
    0: mr:=m;
    1:mr:=round (Xd/Hx)
end;
```

Здесь  $X_d$  - координата  $x$  дефекта,  $H_x$  - шаг вдоль оси  $x$ . Зависимость  $C_m$  от координаты  $x$  отображается массивом  $C_m:coefr$ , итак, на каждом шаге  $x$  значение  $C_m$  берется из соответствующей ячейки этого массива.

Коэффициенты  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $e_4$ ,  $e_5$  и  $e_6$ , которые являются функциями от  $C_m$ , перестают быть неизменными в процессе численного интегрирования. Их приходится пересчитывать на каждом шаге интегрирования. В результате процедура  $Init$  приобретает вид.

```

procedure Init;
var s:integer;
Begin
    C0:=sqrt(e1/Ro);
    Hx:=Lng/m; Dt:=D/L; ks:=1;
    case Nd of
        0: mr:=m;
```

```

    1: mr:=round(Xd/hx);
end;
repeat
    Tau:=Dt/ks; q:=C0*Tau/Hx;
    if q>0.1 then inc(ks)
until q<=0.1;
e:=sqr(q); e7:=e/2;
B1:=1/(1+Hx*k*CL); B2:=1-B1;
B3:=1/(1+Hx*k*Cr); B4:=1-B3;
B5:=1/(1+kt*Hx); B6:=1-B5;
t:=Tau; Ld:=round(mr*L/m);
for s:=0 to mr do Up[s]:=Un(s*Hx);
for s:=1 to mr-1 do
    begin
        e4:=Cm[s]*Tau/2; e5:=1-e; e6:=1+2*e4; e7:=e/2;
        U[s]:=(e5*Up[s]+Tau*Dun(s*Hx)+e7*(Up[s-
            1]+Up[s+1]))/e6;
    end;
case NgL of
    1: U[0]:=UL(t);
    2: U[0]:=U[1]+k*Hx*FL(t);
    3: U[0]:=B1*U[1]+B2*ULk(t)
end;
case Ngr of
    1: U[mr]:=Ur(t);
    2: U[mr]:=U[mr-1]-k*Hx*Fr(t);
    3: U[mr]:=B3*U[mr-1]+B4*Urk(t);
    4: U[mr]:=B5*U[mr-1]+B6*Up[mr]
end;
Up[-1]:=mr; U[-1]:=mr
end;

```

Соответственно процедура Step в описанных условиях приобретает вид процедуры Stept

```

procedure Stept;
    var s:integer;
        Ud:Coefr;
    begin
        t:=t+Tau; Ud[-1]:=mr;
        for s:=1 to mr-1 do
            begin
                e4:=Cm[s]*Tau/2; e2:=e4-1; e3:=e4+1;

```

```

        Ud[s] := (2*U[s]+e2*Up[s]+e*(U[s-1]-
                2*U[s]+U[s+1]))/e3
    end;
case NgL of
    1: Ud[0]:=UL(t);
    2: Ud[0]:=Ud[1]+k*Hx*FL(t);
    3: Ud[0]:=b1*Ud[1]+b2*ULk(t)
end;
case Ngr of
    1: Ud[mr]:=Ur(t);
    2: Ud[mr]:=Ud[mr-1]-k*Hx*Fr(t);
    3: Ud[mr]:=B3*Ud[mr-1]+B4*Urk(t);
    4: Ud[mr]:=B5*Ud[mr-1]+B6*U[mr]
end;
Ud[-1]:=mr; Up:=U; U:=Ud
end;

```

Введение значений коэффициентов, характеризующих свойства материала сваи, граничных условий и их коэффициентов, а также коэффициентов сопротивления выполняет процедура Input.

```

procedure Input;
begin
    repeat
        PutA;
        Ou('0-exit, 1-E1, 2-Ro, 3-k, 4-CL, 5-Cr, 6-Kt,
            7-NgL, 8-Ngr, 9-OpCm');
        Str(E1/1e9:1:1,T10);      Ts:='E1='+T10+'e9';
        Str(Ro,T10);              Ts:=Ts+', Ro='+T10;
        Str(k:1:2,T10);           Ts:=Ts+', k='+T10;
        Str(CL:1:1,T10);          Ts:=Ts+', CL='+T10;
        Str(Cr:1:2,T10);          Ts:=Ts+', Cr='+T10;
        Str(Kt,T10);              Ts:=Ts+', Kt='+T10;
        Str(NgL,T10);             Ts:=Ts+', NgL='+T10;
        Str(Ngr,T10);             Ts:=Ts+', Ngr='+T10;
        Info; J1:=Readkey;
        case J1 of
            '1': Our('E1',E1);
            '2': Oui('Ro',Ro);
            '3': Our('k',k);
            '4': Our('CL',CL);
            '5': Our('Cr',Cr);
            '6': Oui('Kt',Kt);

```

```

        '7': Oui('NgL',NgL);
        '8': Oui('Ngr',Ngr);
        '9': OpCm
    end
until J1='0'
end;

```

График силы, создаваемой ударом молотка по верхнему торцу сваи, демонстрирует процедура GrFl.

```

procedure GrFl;
    var s:integer;
    begin
        Ymax:=0;
        repeat
            PutA; Ou('0-exit, 1-Um, 2-Kf, 3-Tauf, 4-Df, 5-c, 6-
GrFL');
            str(Um:1:2,T10); Ts:='Um='+T10;
            str(Kf:1:2,T10); Ts:=Ts+', Kf='+T10;
            str(Tauf:1:5,T20); Ts:=Ts+', Tauf='+T20;
            str(Df:1:4,T20); Ts:=Ts+', Df='+T20;
            str(c,T10); Ts:=Ts+', c='+T10;
            Info; J1:=readkey;
            case J1 of
                '1': Our('Um',Um);
                '2': Our('Kf',Kf);
                '3': Our('Tauf',Tauf);
                '4': Our('Df',Df);
                '5': Oui('c',c);
                '6': begin
                    Ymax:=0; Ymin:=0; Dt:=Df/L; Mo1[-1]:=L;
                    for s:=0 to L do
                        begin
                            y:=FL(s*Dt); Mo1[s]:=y;
                            if y>Ymax then Ymax:=y
                        end;
                    Xmin:=0; Xmax:=Df; X0Y0(false);
                    cleardevice; SystCoor; Graphic(Mo1,c)
                end
            end
        until J1='0'
    end;

```

Наглядное представление о распространение волн сжатия-растяжения в свае под действием внешних возмущений, в частности, при ударе по ее торцу - дает подпрограмма *Dynam*. Подпрограмма демонстрирует изменение графика перемещений поперечных сечений (“точек”) сваи в функции времени, обновляя профиль перемещений через каждые  $N_c$  шагов по времени. Для этого, исходя из начального состояния, которое задается подпрограммами  $Un(x)$  и  $DUn(x)$ , и при заданных граничных условиях  $N_{gr}$  последовательно шаг за шагом (путем вызова подпрограммы *Step1*) интегрируется дифференциальное уравнение (2.22). Через каждые  $N_c$  шагов по времени профиль перемещений, который фиксируется в массиве  $Up$ , визуализируется в виде графика на экране монитора. Ординаты графика заносятся в массив  $Mo1$  (пересчет массива  $Up:Coefr$  в  $Mo1:CoefL$  выполняется с использованием  $B$  – сплайновой интерполяции). Массив  $Mo1$  превращается в график процедурой *Graphic*, которой передается массив  $Mo1$  и цвет  $-1$ . Кодом  $-1$  задается инверсный цвет (с тем, чтобы потом график можно было удалить путем повторного формирования с тем же инверсным цветом). После формирования графика массив  $Mo1$  переписывается в массив  $Mo2$  (на сохранение). После  $N_c$  шагов обновленный массив  $Up$  снова перекодируется в массив  $Mo1$ . Старый график удаляется с использованием массива  $Mo2$ , а новый формируется массивом  $Mo1$ . И так продолжается до тех пор, пока пользователь не нажмет клавишу „0”. Для этого в верхней строке экрана во время демонстрации „фильма” о колебаниях сваи мерцает надпись „0-exit”.

Для наглядности на графике вертикальными линиями показаны точки  $x = Xd$  и  $x = Lng$ , то есть места наличия дефекта и конец сваи, от которых отражаются волны колебаний.

```

procedure Dynam;
  var s,Ld:integer;
  begin
    Ymax:=2;
    repeat

```



```

PutA;
Ou('0-exit, 1-Xd, 2-Lng, 3-m, 4-D, 5-Nc, 6-Kfd,
    7-Kt, 8-Ymax, 9-Motor');
str(Xd:1:1,T10);    Ts:='Xd='+T10;
str(Lng:1:1,T10);  Ts:=Ts+', Lng='+T10;
str(m,T10);        Ts:=Ts+', m='+T10;
str(D:1:4,T20);    Ts:=Ts+', D='+T20;
str(Nc,T10);       Ts:=Ts+', Nc='+T10;
str(Kfd:1:2,T10);  Ts:=Ts+', Kfd='+T10;
str(Kt,T10);       Ts:=Ts+', Kt='+T10;
str(Ymax:1:7,T20); Ts:=Ts+', Ymax='+T20;
Info; J1:=readkey;
case J1 of
  '1': Our('Xd',Xd);
  '2': Our('Lng',Lng);
  '3': Oui('m',m);
  '4': Our('D',D);
  '5': Oui('Nc',Nc);
  '6': Our('Kfd',Kfd);
  '7': Oui('Kt',Kt);
  '8': Our('Ymax',Ymax);
  '9': begin
        if Xd<Lng then Nd:=1
            else Nd:=0;
        Init;
        Bspline(Up,2,2,0,0);
        Ld:=round(mr/m*L);
        Mol[-1]:=Ld; Mol[Ld+1]:=Dt;
        setcolor(15); Line(Xu+Ld,Yu,Xu+Ld,Yu+H);
        for s:=0 to L do
            if s<=Ld-1
                then Mol[s]:=Bsplint(s*mr/Ld)
                else Mol[s]:=0;
        Xmin:=0; Xmax:=Lng; Ymin:=-Ymax;
        X0Y0(false); cleardevice; SystCoor;
        Graphic(Mol,-1);
        Line(Xu+L,Yu,Xu+L,Yu+H);
        J2:='1'; PutA; Ou('0-exit');
        repeat
            for s:=1 to Nc do Stept; Mo2:=Mol;
            Bspline(Up,2,2,0,0);
            for s:=0 to L do
                if s<=Ld-1
                    then Mol[s]:=Bsplint(s*mr/Ld)
                    else Mol[s]:=0;

```

```

        Graphic (Mo2, -1);
        Graphic (Mo1, -1); setcolor(15);
        Line (Xu+Ld, Yu, Xu+Ld, Yu+H);
        if keypressed then J2:=readkey
until J2='0'
    end
end
until J1='0'
end;

```

Формирование массива  $M_0:CoefL$  ординат колебаний верхнего конца сваи на протяжении отрезка времени  $D=2.5*Lng/C_0$  от момента начала действия удара - выполняет процедура `FormMas`.

Здесь  $Lng/C_0$  - время прохождения звуковой волной расстояния, равного длине сваи  $Lng$ .  $C_0$  - скорость распространения звуковой волны. Итак,  $2*Lng/C_0$  - это время, необходимое для волны чтобы пройти до нижнего конца сваи и возвратиться назад. Коэффициент 2.5 принят "про запас" чтобы более четко выделить колебания - эхо.

При формировании массива  $M_0$  учитывается ранее принятая гипотеза о суперпозиции двух колебаний: сваи без дефекта с весовым коэффициентом  $k_{dd}=(1-k_{fd})$  и сваи с дефектом, с весовым коэффициентом  $k_{fd}$ . Здесь, как раньше отмечалось,  $k_{fd}$  - часть площади поперечного среза сваи, занятая дефектом.

Для удобства пользования здесь граничные условия зафиксированы как  $N_{gl} = 2, N_{gr} = 4$ .

Датчик колебаний верхнего конца сваи может фиксировать или сами перемещения ( $N_p = 0$ ) или их скорости ( $N_p = 1$ ), или, в конце концов, ускорения ( $N_p = 2$ ). Здесь  $N_p$  - номер производной. Поскольку дифференцирование по времени массива  $M_0$  при условии, что шаг  $Dt$  между его соседними ординатами довольно мал, несложно, то в процедуре `FormMas` кроме массива  $M_0$  перемещений верхнего конца сваи будем заодно формировать также массивы  $M_{01}$  для ( $N_p = 1$ ) и  $M_{02}$  для ( $N_p = 2$ ). Если колебания в свае быстро

затухают, то при „разворачивании“ их во времени применим множитель  $e^{k_e t}$ , который будет “усиливать” колебания, амплитуда которых со временем была бы слишком малой для четкого наблюдения. Величина коэффициента  $k_e$  задается пользователем. Приводим листинг процедуры FormMas:

```

procedure FormMas;
  var z,s:integer; ex,kdd:real;
begin
  Nd:=0; Ngr:=4; NgL:=2; Init;
  Mo[-1]:=L; Mo[L+1]:=Dt; Mo[0]:=0;
  kdd:=1-kfd;
  for s:=1 to L do
    begin
      for z:=1 to ks do Stept;
      Mo[s]:=Up[0]*kdd;
    end;
  Nd:=1; Init;
  for s:=1 to L do
    begin
      for z:=1 to ks do Stept;
      Mo[s]:=Mo[s]+kfd*Up[0]
    End
  Mo1[-1]:=L; Mo2[-1]:=L;
  For s:=0 to L-1 do
  Mo1[s]:=(Mo[s+1]-Mo[s])/Dt;
  Mo1[L]:=Mo1[L-1];
  For s:=0 to L-1 do
  Mo2[s]:=(Mo1[s+1]-Mo1[s])/Dt;
  Mo2[L]:=Mo2[L-1];
      For s:=0 to L do
  Begin
    Ex:=exp(ke*s*Dt);
    Mo[s]:=Mo[s]*ex;
    Mo1[s]:=Mo1[s]*ex;
    Mo2[s]:=Mo2[s]*ex;
  end
end;

```

Формирование системы координат под график колебаний (для  $Np = 0, 1$  или 2) выполняет подпрограмма FormSc:

```

procedure FormSc;
var s:integer; y:real;
begin
  Xmin:=0; Xmax:=D; Ymin:=0; Ymax:=0;
  FormMas;
  for s:= 0 to L do
    case Np of
      0: y:=Mo[s];
      1: y:=Mo1[s]
      2: y:=Mo2[s]
    end;
    if y<Ymin then Ymin:=y;
    if y>Ymax then Ymax:=y
  end;
  XOY0(false); ClearDevice; SystCoor;
  case Np of
    0:Graphic(Mo,c);
    1:Graphic(Mo1,c);
    2:Graphic(Mo2,c);
  end;
  SetLineStyle(3,0,1);
  Line(xu+Nm*Dxm,yu,xu+Nm*Dxm,yu+h);
  SetLineStyle(0,0,1);
  for s:=1 to Nm do
    Line(xu+s*Dxm,y0-3,xu+s*Dxm,y0+3);
  for s:=0 to Nm do
    begin
      Str(s,T10);
      if s<10 then OutTextXY(xu+s*Dxm-2,y0+8,T10)
        else OutTextXY(xu+s*Dxm-6,y0+8,T10)
    end;
  end;
end;

```

Здесь после формирования осей системы координат и графика, на оси времени для удобства интерпретации графика нанесены метки (штрихи), которые отвечают расстояниям к отображающей поверхности (это расстояние пропорционально удвоенному времени - на прохождение волны к преграде и возвращение ее назад). Метки координат оцифрованы в метрах.

Итак, процедура FormSc берет на себя формирование графика, под который только что была сформирована система координат.

Если же пользователь захочет оценить влияние на этот график таких

параметров, как, например,  $X_d, m, k_e, k_{fd}, k_t$ , то изменяя по желанию цвет  $C$ , на ранее сформированный график (или графики) можно нанести соответствующим цветом варианты, которые интересуют пользователя. Новые графики (в старой системе координат) формируются при вызове опции 9 - Gr в подпрограмме Resp:

```

procedure Resp;
  var s, sx, Bxm: integer;;
  begin
    C0:=sqrt(e1/Ro); D:=2.5*Lng/c0; Nm:=round(Lng);
    Dxm:=round(L/(1.25*Lng));
    repeat
      putA;
      Ou('0-exit, 1-Xd, 2-m, 3-ke, 4-Kfd, 5-Kt,
        6-Np, 7-C, 8-Sc, 9-Gr');
      Str(Xd:1:1, T10);      Ts:='Xd='+T10;
      Str(m, T10);          Ts:=Ts+', m='+T10;
      Str(ke:1:1, T10);     Ts:=Ts+', ke='+T10;
      Str(Kfd:1:3, T10);    Ts:=Ts+', Kfd='+T10;
      Str(Kt, T10);        Ts:=Ts+', Kt='+T10;
      Str(Np, T10);        Ts:=Ts+', Np='+T10;
      Str(C, T10);         Ts:=Ts+', C='+T10;
      Info; J1:=Readkey;
      case J1 of
        '1':Our('Xd', Xd);
        '2':Oui('m', m);
        '3':Our('ke', ke);
        '4':Our('Kfd', Kfd);
        '5':Oui('Kt', Kt);
        '6':Oui('Np', Np);
        '7':Oui('c', c);
        '8':FormSc;
        '9':begin
              FormMas;
              case Np of
                0:Graphic(Mo, c);
                1:Graphic(Mo1, c);
                2:Graphic(Mo2, c)
              end
            end
          end
        until J1='0'
      end;

```

### 2.3. Динамика проточного датчика плотности жидкости

Для измерения весовой плотности жидкости, протекающей по трубопроводу, может быть использован дифференциальный манометр, который измеряет перепад давления на вертикальном участке трубопровода. Пусть расстояние между точками измерения давления по высоте равняется  $H$ , линейная скорость движения жидкости в трубопроводе  $W$ , тогда время прохождения частичкой жидкости расстояния между точками отбора будет

$$\tau_0 = \frac{H}{W}. \quad (2.45)$$

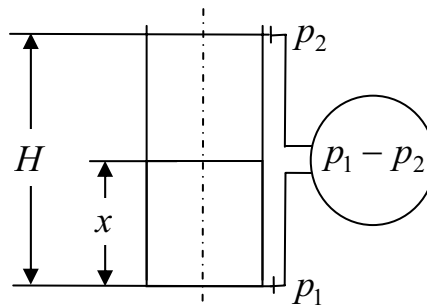


Рис. 2.7. Схема датчика.

Обозначим измеряемую величину (весовую плотность) как  $\rho$ , тогда, очевидно,

$$\rho = \frac{P_1 - P_2}{H}. \quad (2.46)$$

В приращениях относительно установившегося режима

$$\Delta\rho = \frac{\Delta p_1 - \Delta p_2}{H}. \quad (2.47)$$

Рассчитаем переходную характеристику датчика, когда при  $t = 0$  в точке установки датчика (на входе в измерительный участок) плотность скачком изменилась (выросла) на  $\rho_0$  (ступенчатый сигнал  $\rho_0 * 1(t)$ ). Тогда на отрезке времени  $0 \leq t < \tau_0$  давление  $p_1$  будет возрастать линейно по мере продвижения жидкости вверх по трубе

$$\Delta p_1 = wt\rho_0, \quad 0 \leq t < \tau_0. \quad (2.48)$$

Здесь  $wt = X$  - путь, пройденный жидкостью за время  $t$ . На этом отрезке времени  $\Delta p_2 = 0$  и отсюда (2.47)

$$\Delta \rho = \frac{wt}{H} \rho_0, \quad 0 \leq t < \tau_0$$

или, учитывая (2.45)

$$\Delta \rho = \frac{t}{\tau_0} \rho_0, \quad 0 \leq t < \tau_0. \quad (2.49)$$

Начиная с момента  $\tau_0$  сигнал  $\Delta p_2$  начинает возрастать синхронно с возрастанием  $\Delta p_1$ , итак, согласно (2.47) дальнейшее возрастание  $\Delta \rho$  прекращается, а именно  $\Delta \rho$  стабилизируется на уровне, достигнутом на момент  $\tau_0$ , то есть

$$\Delta \rho = \rho_0. \quad (2.50)$$

Если принять  $\rho_0 = 1$  (единичный ступенчатый сигнал), то реакция на него (при нулевых начальных условиях) может быть представлена обобщенной

формулой

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_0}, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 1, & t > \tau_0. \end{cases}$$

Найдем изображение Лапласа от переходной характеристики  $h(t)$

$$\bar{h}(p) = \int_0^{\tau_0} \frac{t}{\tau_0} e^{-pt} dt + \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-pt} dt. \quad (2.51)$$

Но, как легко убедиться

$$\int t e^{-pt} dt = \left( \frac{t}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt},$$

$$\int e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

Подставляем эти интегралы в (2.51)

$$\bar{h}(p) = -\frac{1}{t} \left( \frac{t}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt} \Bigg|_0^{\tau_0} - \frac{1}{p} e^{-pt} \Bigg|_{\tau_0}^{\infty}$$

Подставляя предельные значения, получим

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau_0}}{p\tau_0}$$

Передаточная же функция как известно

$$W(p) = p\bar{h}(p).$$

Итак, окончательно передаточная функция датчика будет

$$W(p) = \frac{1 - e^{-p\tau_0}}{p\tau_0}. \quad (2.52)$$



## 2.4. Динамика транспортера-расходомера

Для измерения расхода сыпучего материала, который переносится транспортером, можно воспользоваться такой схемой рис. 2.8.

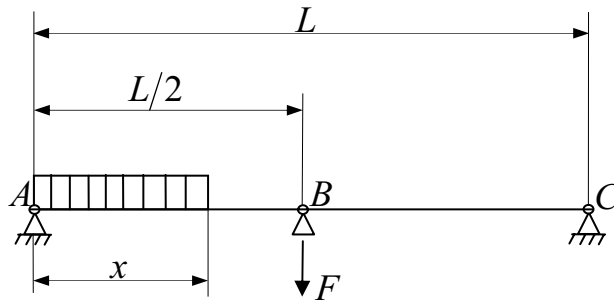


Рис.2.8. Расчетная схема транспортера-расходомера

Лента транспортера на отрезке  $AC$  опирается на две шарнирно-закрепленных балки  $AB$  и  $BC$  ( $AB=BC=L/2$ ). Лента транспортера движется с линейной скоростью  $W = const$ . Датчик измеряет суммарное усилие  $F$ , с которым балки  $AB$  и  $BC$  действуют на их общую опору  $B$ . Если принять, что ширина слоя материала на ленте  $b$ , высота  $h$ , а его плотность  $\rho$ , то в установившемся режиме, когда  $h = h_0 = const$  расход материала  $Q$  будет

$$Q = bhW\rho. \quad (2.53)$$

Учитывая симметричность конструкции усилие в точке  $B$ , вызванное наличием материала на транспортере, будет

$$F = bh\rho \frac{L}{2}. \quad (2.54)$$

Сопоставляя (2.53) и (2.54) получаем

$$F = \frac{L}{2W} Q. \quad (2.55)$$

Если обозначить

$$\frac{L}{W} = \tau_0, \quad (2.56)$$

где  $\tau_0$  - время прохождения частичкой материала расстояния  $AC$ , то (2.55) можно представить так

$$F = kQ, \quad (2.57)$$

где  $k = \frac{2}{\tau_0}$ .

Предположим теперь, что сначала (при  $t < 0$ ) транспортер был пустой (толщина слоя  $h = 0$ ), а потом при  $t = 0$  на входе в транспортер  $h$  стало равным  $h_0 = const$ . На отрезке времени  $0 \leq t < \tau_0/2$  участок балки  $AB$ , начиная от точки  $A$  будет заполнен на длину  $wt$  слоем материала толщиной  $h_0$ . Вес материала на этом участке транспортера будет  $bh_0\rho wt$ , равнодействующая будет приложена на расстоянии  $\frac{wt}{2}$  точки  $A$ , а уравнение суммы моментов сил, приложенных к балке  $AB$ , относительно точки  $A$  будет

$$bh_0\rho wt \frac{wt}{2} = F_1 \frac{L}{2},$$

где  $F_1$  - составляющая силы на опоре  $B$ , обусловленная имеющимся на транспортере материалом. Из последнего уравнения

$$F_1 = bh\rho L \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2. \quad (2.58)$$

При  $t = \frac{\tau_0}{2}$ , когда материал дойдет до точки  $B$ , сила  $F_1$  приобретает значения

$F_1^*$

$$F_1^* = \frac{bh\rho L}{4}. \quad (2.59)$$

В дальнейшем балка  $AB$  остается заполненной на высоту  $h_0$ , и сила  $F_1$  не изменяется, оставаясь равной  $F_1^*$ . Но к ней добавляется сила  $F_2$ , с которой балка  $BC$  действует на опору  $B$  под влиянием материала, который появляется на балке  $BC$ . На отрезке времени  $\frac{\tau_0}{2} \leq t < \tau$  на балке  $BC$  материалом с высотой  $h_0$  будет заполнен участок длиной  $\left( wt - \frac{L}{2} \right)$ . Итак, равнодействующий вес материала на этом участке будет  $bh_0\rho \left( wt - \frac{L}{2} \right)$ , и эта равнодействующая

будет приложена на расстоянии  $\frac{L}{2} - \left( wt - \frac{L}{2} \right) / 2 = \frac{3L}{4} - \frac{wt}{2}$  от точки  $C$ . Условие равновесия балки  $BC$  в виде суммы моментов сил, приложенных к  $BC$ , относительно точки  $C$  будет

$$bh_0\rho \left( wt - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{3L}{4} - \frac{wt}{2} \right) = F_2 \frac{L}{2},$$

откуда

$$F_2 = bh_0\rho L \left( \frac{t}{\tau_0} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{2} - \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (2.60)$$

При  $t = \tau_0$ , когда материал доходит к точке  $C$ ,  $F_2$  становится равным  $F_2^*$

$$F_2^* = \frac{bh_0\rho L}{4}. \quad (2.61)$$

Суммарный эффект двух сил  $F^* = F_1^* + F_2^*$  будет

$$F^* = \frac{bh_0\rho L}{2}. \quad (2.62)$$

Это отвечает формуле (2.54) при  $h = h_0$ .

Если сумму сил, которые действуют на точку  $B$ , поделить на  $F^*$  из (2.56), то получим

$$\frac{F}{F^*} = \begin{cases} 2 \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2, & 0 \leq t < \frac{\tau_0}{2}, \\ 2 \left( \frac{t}{\tau_0} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{2} - \frac{t}{\tau_0} \right) + \frac{1}{2}, & \frac{\tau_0}{2} \leq t < \tau_0, \\ 1, & t \geq \tau_0, \end{cases}$$

или

$$\frac{F}{F^*} = \frac{2}{\tau_0^2} \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < \frac{\tau_0}{2}, \\ -t^2 + 2\tau_0 t - \frac{\tau_0^2}{2}, & \frac{\tau_0}{2} \leq t < \tau_0, \\ \frac{\tau_0^2}{2}, & t \geq \tau_0. \end{cases} \quad (2.63)$$

Найдем изображение Лапласа от (2.63)

$$L\left(\frac{F}{F^*}\right) = \frac{2}{\tau_0^2} \left\{ \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} t^2 e^{-pt} dt + \int_{\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0} (-t^2 + 2\tau_0 t - \frac{\tau_0^2}{2}) e^{-pt} dt + \frac{\tau_0^2}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-pt} dt \right\} \quad (2.64)$$

Примем во внимание, что

$$\begin{cases} \int e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}, \\ \int t e^{-pt} dt = -\left(\frac{t}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{-pt}, \\ \int t^2 e^{-pt} dt = -\left(\frac{t^2}{p} + \frac{2t}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) e^{-pt}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Тогда с учетом соотношений (2.65) формула (2.64) приобретает вид

$$L\left(\frac{F}{F^*}\right) = \frac{1}{p} \left( \frac{1 - e^{-p\frac{\tau_0}{2}}}{p\frac{\tau_0}{2}} \right)^2. \quad (2.66)$$

Если рассматривать (2.66) как нормированную (к единичному коэффициенту передачи) переходную характеристику транспортера-расходомера, получаем его передаточную функцию

$$W(p) = \left( \frac{1 - e^{-pT}}{pT} \right)^2, \quad (2.67)$$

где  $T = \frac{\tau_0}{2}$ .

На базе формулы (2.63) можно предложить такую подпрограмму-процедуру, которая формирует массив ординат очередной переходной

характеристики транспортера-расходомера (подпрограмма FormHt). В ней T0-это  $\tau_0$ .

```

Procedure FormHt (T0: real; L: integer; Var Ht: CoefL);
Var D, Dt, k0, t: real;
    S, s0: integer;
Begin
    D:=1.2*T0; Dt:=D/L; k0:=2/sqr(T0);
    S0:=round(T0/2); Ht[-1]:=L; Ht[L+1]:=Dt;
    for S:=S0+1 to 2*S0 do
        begin
            t:=S*Dt;
            Ht[S]:=-sqr(t)+2*T0*t-sqr(T0)/2
        end;
    for S:=2*S0+1 to L do Ht[S]:=1
End;

```

Рассмотрим еще алгоритм расчета частотных характеристик расходомера на базе его передаточной функции (2.67)

$$W(j\omega) = \left( \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right)^2. \quad (2.68)$$

Представляем  $e^{-j\omega T}$  по формуле Эйлера как  $\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)$  и обозначаем

$$R_1 = 1 - \cos(\omega T),$$

$$I_1 = \sin(\omega T).$$

Тогда (2.68) приобретает вид

$$W(j\omega) = \left( \frac{I_1 - jR_1}{\omega T} \right)^2 = X + jY \quad (2.69)$$

где

$$X = \frac{R_1^2 + I_1^2}{(\omega T)^2},$$

$$Y = \frac{-2R_1 I_1}{(\omega T)^2}.$$

Показанную последовательность вычислений для текущего значения  $w$  (ЭТО глобальный идентификатор, который обозначает  $\omega$ ) реализует

подпрограмма URGod.

```
Procedure UrGod;  
var wT, wT2, R1, I1: real;  
begin  
  wT:=w*T; R1:=1-cos(wT); I1:=sin(wT);  
  wT2:=sqr(wT);  
  X:=(sqr(R1)+sqr(I1))/wT2;  
  Y:=-2*R1/wT2  
End;
```

## Литература

1. Аверіна Т. В., Кубрак Н. А. Динаміка елементів систем: Навчальний посібник. – К.: ІЗМН, 1998.- 224с.
2. Аверіна Т. В., Кубрак Н. А. Комп'ютерне визначення передаточних функцій за системою рівнянь 1-го порядку.- К.: // Автоматизація виробничих процесів, К, 2000, №1(10), с.29-31
3. Автоматизация настройки систем управления. / В. Я. Ротач, В. Ф. Кузишин, А.С. Ключев и др. под ред. В.Я. Ротача/. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 272с.
4. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП. – К.: Вища школа, 1986. – 335с.
5. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно- распределенными динамическими объектами. – К.: Вища школа, 1985.- 170с.
6. Алекперов В.П. Определение передаточной функции линейного объекта регулирования по кривой переходного процесса. // Тр. ЦНИИКА, вып. 2. – Л.: Физматгиз, 1961, с. 78-81
7. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.- 772с.
8. Андриянов П.А., Масленников И.М. Влияние распределенности параметров на динамические свойства теплообменников. // Химическая промышленность, 1963, № 12.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631с.
10. Белова Д.А., Кузин Р.Е. Применение ЭВМ для анализа и синтеза автоматических систем управления. – М.: Энергия, 1979.- 264с.
11. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972.- 768с.
12. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972.- 416с.

13. Бородюк В.Л., Кузнецов В.Е. Эффективность обобщенного метода наименьших квадратов в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика, 1974, №7, с.18-23.
14. Булгаков Б.Б., Кубрак А.И. Пневмоавтоматика. – К.: Техника, 1977.- 188с.
15. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979.- 224с.
16. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч.2, - М.: Иностран. лит., 1949.
17. Волик Б.Г. Динамические характеристики трубопровода, входящего в контур управления тепловыми процессами. // Автоматика и телемеханика, 1965, т.16, №3.
18. Голдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.-М.: Стройиздат, 1965.
19. Грищенко А.З., Кубрак Н.А. Комп'ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі теплоакumuлюючої стінки. // Автоматизація виробничих процесів, Київ, 2001, №1(12), с.28-35.
20. Грищенко А.З., Кубрак А.И., Баско В.П. Динамика обогрева теплоакumuлирующих стенок нагревателями сопротивления. Сб. Научные и методические задачи создания систем и средств автоматизации в химическом производстве. – К.: Наукова думка, 1980, с. 45-52.
21. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977.
22. Девятков Б.Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. - СО АН СССР, 1964.- 323с.
23. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. – М.: Энергия, 1979.- 240с.
24. Динамические характеристики промышленных объектов регулирования. Тр. Конференции общества приборостроителей, состоявшейся в Кембридже 4-6 апреля 1956г. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1960.
25. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1990.- 206с.



26. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука, 1987.- 240с.
27. Жученко А.І., Кваско М.З., Кубрак Н.А. Ідентифікація динамічних характеристик. Комп'ютерні методи. – К.: вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. – 182с.
28. Жученко А.І., Кубрак Н.А. Математичне моделювання динамічних режимів змійовикових теплообмінних апаратів. //Автоматизація виробничих процесів, Київ, 2003, №1(16), с43-47
29. Жученко А.І., Кубрак Н.А. Математичне моделювання динамічних режимів типових теплообмінних апаратів. // Наукові вісті НТУУ „КПІ”, 2002, №5, с.25-29.
30. Жученко А.І., Кубрак Н.А. Математичне моделювання динамічних режимів теплообмінних апаратів типу „ труба в трубі” // Наукові вісті НТУУ „КПІ”, 2003, №1, с.21-26.
31. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.
32. Карачун В.В., Дидковский В.С. Методы расчета динамических систем. – К.: Будівельник, 1992. – 112с.
33. Карачун В.В., Кваско М.З., Кубрак Н.А. Прикладний аналіз і візуалізація характеристик динамічних систем: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1999. – 152с.
34. Карачун В.В., Кубрак Н.А. Дослідження частотних характеристик консервативних систем. // Автоматизація виробничих процесів, Київ, 1999, №1/8, с. 35-40.
35. Карачун В.В., Кубрак Н.А. Дротяні елементи приладів в акустичному середовищі. – К.: Корнійчук, 2001. – 160с.
36. Карачун В.В., Кубрак Н.А. Комп'ютерне визначення передаточних функцій дискретної моделі струнного підвісу приладів. // Вісник Житомирського інженерно – технологічного інституту, 2000, №12, с.158-163.

37. Карачун В.В., Кубрак Н.А., Мельник В.М., Потапова К.Р. Дифракція звуку на кардановому підвісі гіроскопа. // Вісник Житомирського інженерно – технологічного інституту, 1999, №11, с.248-250.
38. Карачун В.В., Кубрак Н.А., Потапова Е.Р., Гнатейко Н.В. Влияние акустического излучения на динамику подвесов. // Космічна наука і технологія, 1999, т. 5, №2/3, с.75-77.
39. Кваско М.З., Коляденко С.С. Моделирование греющей части выпарного аппарата. // Химическое машиностроение, 1985, вып.42,с.106-109.
40. Кваско М.З., Кубрак А.І., Жученко А.І. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми: Навч. посібник.-К.: Політехніка”,2003.-360с.
41. Кваско М.З., Кубрак Н.А. Динамічні моделі типових теплообмінних апаратів: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1999. – 136с.
42. Кваско М.З., Кубрак А.И., Журба Н.В., Пищенко Л.И., Жученко А.И. О динамических характеристиках проточных датчиков плотности. // Химическое машиностроение, 1976, вып.24, с.102-105.
43. Кваско М.З., Ладиев Р.Я. Математическое моделирование процесса выпаривания в аппарате наружного горения. // Химическое машиностроение, 1973, вып. 17, с. 88-92.
44. Киричков В.Н. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами: Учебное пособие. – К.: Вища школа, 1990. -263с.
45. Кожевникова Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интеграл Фурье: Теория поля: Аналитическая и специальные функции: Преобразования Лапласа. – М.: Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интеграл Фурье: Теория поля: Аналитическая и специальные функции: Преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1964. – 183с.
46. Конторович М.И. Операционные исчисления и процессы в электрических цепях. – М.: Наука, 1964. – 328с.

47. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах.-М.: Изд.иностр.л-ры, 1955.-192с
48. Корнилов Ю.Г. Теоретические основы автоматического регулирования. – К.: 1966. – 397с.
49. Котляр Я.М., Совершенный В.Д., Стриженов Д.С. Методы и задачи тепломассообмена. – М.: Машиностроение, 1987. – 320с.
50. Краснопрошина А.А., Репникова Н.В., Ильченко А.А. Современный анализ систем управления с приложением MATLAB, Simulink, Control System: Учебное пособие. – К.: „Корнейчук”, 1999. – 144с.
51. Кремнев О.А., Журавленко В.Я. Тепло- и массообмен в горном массиве и подземных сооружениях. – К.: Наукова думка, 1980. – 382с.
52. Кубрак А.И. Ідентифікація динамічних характеристик елементів систем керування. Ч.1. Математичні методи: Навч. посібник. К.: ІСДО, 1995. – 208с.
53. Кубрак А.И. Инженерный метод расчета динамических характеристик двухтрубных теплообменников. // Химическое машиностроение, 1972, вып.15, с.131-139.
54. Кубрак А.И. Об аппроксимации неколебательных объектов регулирования звеном первого порядка с запаздыванием. // Вестник Киевского политехнического института, Серия химического машиностроения, 1969, №6, с. 108-113.
55. Кубрак А.И. О выборе типа математической модели теплоаккумулирующей стенки. Сб. Динамика тепловых процессов. – К.: Наукова думка, 1972. с. 12-20.
56. Кубрак А.И. О косвенных измерениях температуры поверхности валков. // Химическое машиностроение, 1968, вып.8, с. 110-115.
57. Кубрак А.И. Приближенный расчет на ЭВМ настройки регулятора. // Химическое машиностроение, 1990, вып.51, с. 84-94.

58. Кубрак А.И. О разложении в ряд Маклорена передаточных функций теплообменников типа „ труба в трубе”. // Химическое машиностроение, 1975, вып. 21, с. 136-141.
59. Кубрак А.И. Расчет автоматических систем регулирования на микро-ЭВМ. Сообщение 1. Расчет переходных процессов. //Сб.Химическое машиностроение, 1987, вып. 46, с. 70-88.
60. Кубрак А.И. Расчет автоматических систем регулирования. Сообщ. 2. Аппроксимация динамики объектов путем обработки переходных процессов. // Сб. Химическое машиностроение, 1988, вып. 47, с. 73-99.
61. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Расчет на ЭВМ автоматических систем регулирования. Сообщ. 3. Исследование устойчивости линейных систем. // Химическое машиностроение, 1988, вып. 47, с. 99-117.
62. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Расчет на ЭВМ автоматических систем регулирования. Сообщ. 4. Корневые методы исследования линейных систем. // Химическое машиностроение, 1988, с. 56-75.
63. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Расчет на ЭВМ автоматических систем регулирования. Сообщ. 5. Частотные методы исследования качества линейных систем . // Химическое машиностроение, 1988, вып. 48, с. 75-89.
64. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Расчет на ЭВМ автоматических систем регулирования. Сообщ. 6. Расчет каскадных систем. // Химическое машиностроение, 1989, вып. 49, с. 73-89.
65. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Расчет на ЭВМ автоматических систем регулирования. Сообщ. 7. Расчет двумерных систем. // Химическое машиностроение, 1989, вып. 49, с. 89-100.
66. Кубрак А.И., Аверина Т.В. Алгоритм формирования оригинала изображения дробно- рациональной функции. // Автоматизация виробничих процесів, 1998, вип. ½ (6/7), с. 91-93.
67. Кубрак А.И., Аверина Т.В. Паскаль та числові методи: Навч. посібник. – К.: НМК ВО, 1992. – 106с.

68. Кубрак А.И., Аверина Т.В. Прикладные программы для исследования автоматических систем. Сообщ. 1. Аппроксимация полиномами и построение графиков. // Химическое машиностроение, 1992, вып. 55, с. 88-110.
69. Кубрак А.И., Каверіна Т.В., Кирилук Г.Ю. Порівняльний аналіз різних методів апроксимації транспортного запізнювання. // Автоматизація виробничих процесів, Київ, 2002, №2(15), с.19-22.
70. Кубрак А.И., Жученко А.И., Ярощук Л.Д. Методы и программы для исследования систем автоматизации: Учебн. пособие.- К.: УМК ВО, 1989. – 228с.
71. Кубрак А.И., Жученко А.И., Ярощук Л.Д. Численные методы и программы при исследовании автоматических систем: Учеб. Пособие. – К.: УМК ВО, 1988. – 207с.
72. Кубрак А.И., Кваско М.З. Об учете влияния толстых стенок на динамические свойства объектов регулирования температуры. // Химическое машиностроение, 1970, вып. 12, с. 148-157.
73. Кубрак А.И., Шевченко Б.Е. Методика расчета частотных характеристик валков. // Химическое машиностроение, 1969, вып. 10, с. 116-120.
74. Кубрак А.И., Шевченко Б.Е. . О динамических характеристиках вала как объекта автоматического регулирования температуры. // Химическое машиностроение, 1969, вып. 9, с. 116-120.
75. Кубрак А.И., Шевченко Б.Е. О разложении в ряд передаточной функции теплоаккумулирующей стенки. // Химическое машиностроение, 1978, вып. 18, с. 95-97.
76. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Програмування та розрахунок автоматичних систем: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1992. – 366с
77. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д., Аверіна Т.В. Програмування на Турбо Паскалі. Початковий курс: Навч. посібник. – К.: НМЦ ВО, 2000. – 188с.

78. Кубрак Н. А. Волновые задачи рассеяния энергии акустического излучения в упругих подвесах приборов управления ракет-носителей. // Космічна наука і технлогія, 1999, т. 5, №2/3, с. 78-80.
79. Кубрак Н. А. Комп'ютерне визначення частотних характеристик консервативних систем носіїв. // 2 Всеукраїнська молодіжна науково – практична конференція „Людина і космос”, 12 – 14 квітня 2000р. Матеріал конференції. – Дніпропетровськ.: НЦАОМУ, 2000, с. 271.
80. Кубрак Н. А. Комп'ютерне дослідження лінійних автоматичних систем високого порядку. // Автоматизація виробничих процесів, Київ, 2000, №2 (11), с. 33-36.
81. Кубрак Н. А. Хвильові процеси в гнучких ланках автоматичних систем.: Навч. посібник. – К.: НМЦ ВО, 2000. – 160с.
82. Ладиев Р.Я., Кубрак А.И. О частотных характеристиках змеевидных теплообменников. // Химическое машиностроение, 1971, вып. 14, с. 97-103.
83. Ладиев Р.Я., Кубрак А.И. О частотных характеристиках парожидкостных теплообменников и трубопроводов. // Химическое машиностроение, 1970, вып. 11, с. 122-130.
84. Ладиев Р.Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.И., Кваско М.З. Аналитические методы описания объектов с сосредоточенными параметрами: Учебное пособие по курсу: „Объекты управления и методы их исследования”. Ч. 1. Математическое описание объектов с сосредоточенными параметрами. – К.: КПИ, 1973. – 133с.
85. Ладиев Р.Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.И., Кваско М.З. Аналитические методы описания объектов с сосредоточенными параметрами. Ч.2. Исследование математических моделей объектов управления с сосредоточенными параметрами. – К.: КПИ, 1973. – 108с.
86. Ладиев Р.Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.И., Кваско М.З. Математическое описание объектов с распределенными параметрами: Учебное пособие. – К.: КПИ, 1974. – 149с.
87. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 570с.

88. Маковский В.А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. – М.: Металлургия, 1971.
89. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.-К.: Изд. Киевск. Университета, 1965.-185с.
90. Мосолов В.Е., Тихонов В.С. Определение передаточной функции гибкой нерастяжимой нити при пространственном обтекании потоком. // Автоматика, 1979, №4, с. 24-30.
91. Носова Л.Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных. – М.: Издательство АН СССР, 1960. – 422с.
92. Олейник Е.Г., Кваско М.З., Цетковский Э.В. Многокорпусная выпарная установка как объект управления в целлюлозно – бумажном производстве и задачи ее оптимизации. // Химическое машиностроение, 1979, вып.30, с. 57-60.
93. Ордынцев В.М. Математическое описание объектов автоматизи. – М.: Машиностроение, 1965. – 360с.
94. Остапенко Ю.О. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів керування. – К.: „Задруга”, 1999. – 420с.
95. Остапенко Ю.А., Ладиев Р.Я., Марченко Г.Г. Математическое описание температурного режима реактора со спиральной рубашкой. // Вестник КПИ, Серия химического машиностроения и технологии, 1971, вып. 8, с. 159-163.
96. Палевский В.В., Кубрак А.И. Индукционные устройства как элементы автоматических систем. Алгоритмы и программы: Учебное пособие. – К.: УМК ВО, 1990. – 170с.
97. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 255с.
98. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990. – 272с.
99. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 316с.

100. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, ошибки и парадоксы.-М.:Наука, 1979,384с.
101. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процесса производства. – М.: Энергия, 1975. – 375с.
102. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382с.
103. Ротач В.Я. Расчет настройки промышленных систем регулирования. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 214с.
104. Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами: Учебник для ВУЗов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 296с.
105. Савицкий С.К. Инженерные методы идентификации энергетических объектов. – Л.: Энергия, 1978. – 71с.
106. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 350с.
107. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222с.
108. Серебrenиков М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. – М.: Наука, 1965. – 244с.
109. Симою М.П. Определение коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев и систем регулирования. // Автоматика и телемеханика, т. 18, №6, 1952.
110. Симою М.П. Определение передаточных функций по временным характеристикам линеаризованных систем. // Приборостроение, №3, 1958.
111. Стефани Е.П., Панько М.А., Пикина Г.А. Сборник задач по основам автоматического регулирования теплоэнергетических процессов. – М.: Энергия, 1973. – 335с.
112. Тимошенко С.П. , Янг Д.Н., Уивер У. Колебания в инерционном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472с.
113. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736с.



114. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384с.
115. Фаронов В.В. Программирование на персональных ЭВМ в среде Турбо Паскаль. – М.: Издательство МВТУ, 1992. – 448с.
116. Фаронов В.В. Турбо Паскаль 7.0. Начальный курс: Учебное пособие. – М.: Нолидж, 1997. – 616с.
117. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1965. – 716с.
118. Чермак И., Петерка В., Заворка И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. – М.: Мир, 1972. – 623с.
119. Шевяков А.А., Яковлева Р.В. Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1968. – 317с.
120. Шестихин О.Ф., Энгель Р.В. Машинные методы проектирования систем автоматического управления. – Л.: Машиностроение, 1973. – 256с.
121. Широкий Д.К., Куриленко О.Д. Оптимальні настройки промислових систем регулювання. – К.: Вища школа, 1975. – 264с.
122. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 171с.
123. Эрриот П. Регулирование производственных процессов. – М.: Энергия, 1967. – 480с.
124. Юсупов Р.М. Получение информации об управляемом процессе в самонастраивающихся системах. –М.-Л.: Энергия, 1966.-140с.
125. Юшков П.П. Функции Бесселя и их применение к задаче об охлаждении цилиндра, - Л., 1948.

## Содержание

Введение	3
1. Математическое моделирование динамики тепловых объектов	5
1.1. Передаточные функции и частотные характеристики плоской теплоаккумулирующей стенки	6
1.2. Передаточные функции и частотные характеристики проточной емкости с толстыми теплоаккумулирующими стенками	20
1.3. Динамика температуры в неизолированном цилиндрическом стержне	25
1.4. Передаточные функции и частотные характеристики цилиндрической теплоаккумулирующей стенки	29
1.5. Динамика температуры в зоне расплава червячного экструдера	41
1.6. Динамические характеристики тонкостенного трубопровода по температурным каналам	48
1.7. Динамика прямого теплообменника типа	51
1.8. Динамические характеристики змеевикового теплообменника	56
2. Моделирование динамики механических систем	61
2.1. Динамика малых поперечных колебаний нагруженной нити	62
2.2. Динамика продольных колебаний вязко-упругого стержня	80
2.3. Динамика проточного датчика плотности жидкости	101
2.4. Динамика транспортера-расходомера	104
Литература	110

Учебное издание

Жученко Анатолий Иванович,  
Кубрак Наталья Анатольевна,  
Голинко Игорь Михайлович

# **ДИНАМИКА ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Учебное пособие